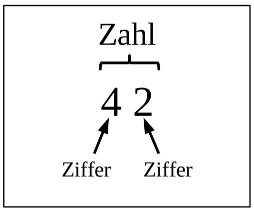
0.1. Natürliche Zahlen

0.1.1 Das Dezimalsystem

Mit zehn **Ziffern** 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 lassen sich alle **Zahlen** im **Dezimalsystem** (**Zehnersystem** von lat. decem = griech. deka = zehn) darstellen:

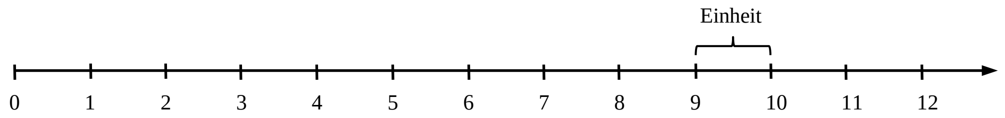
Stellenwerttafel

ZT	T	H	Z	E	
				3	= 3 Einer
			3	2	= 3 Zehner + 2 Einer
		3	6	4	= 3 Hunderter + 6 Zehner + 4 Einer
	3	8	0	2	= 3 Tausender + 8 Hunderter + 0 Zehner + 2 Einer



Übungen: Aufgaben zum Dezimalsystem Nr. 1 - 6

0.1.2 Der Zahlenstrahl



Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Zahlen auf dem Zahlenstrahl heißt **Einheit**.
Zum Vergleichen von Zahlen benutzt man die **Relationszeichen** < (kleiner als) und > (größer als).

Merke: kleinere Zahl – Spitze des Relationszeichens – links auf dem Zahlenstrahl
größere Zahl – Öffnung des Relationszeichens – rechts auf dem Zahlenstrahl

Beispiel: 14 ist kleiner als 35 — 35 ist größer als 14

14 < 35 — 35 > 14

Übungen: Aufgaben zum Zahlenstrahl Nr. 1 - 4

0.1.3 Große Zahlen

Um große Zahlen besser lesen und vergleichen zu können, teilt man die Stellenwerttafel in Dreierblöcke:

Billionen B.			Milliarden Mrd.			Millionen Mio.			Tausend Tsd.					
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
											1	0	0	0
								1	0	0	0	0	0	0
					1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

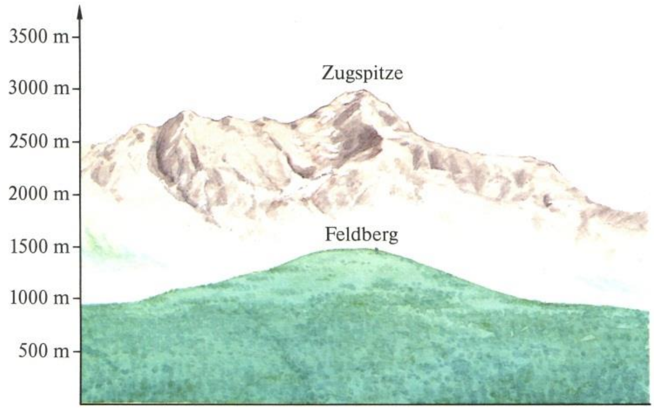
1 Tausender	= 1 000 Einer	=	1 000	
1 Million	= 1 000 Tausender	=	1 000 000	von lat. mille = tausend (Tausender)
1 Milliarde	= 1 000 Millionen	=	1 000 000 000	von lat. mille = tausend (Millionen)
1 Billion	= 1 000 Milliarden	=	1 000 000 000 000	von lat. bis = zweimal für Million Millionen

Beispiele:

8 300 000	acht Millionen dreihunderttausend
6 800 000 001	sechs Milliarden achthundert Millionen eins
213 000 017 019	zweihundertdreizehn Milliarden siebzehntausendneunzehn
4 076 000 000 211	vier Billionen sechsundsiebzig Milliarden zweihundert elf

Übungen: Aufgaben zu großen Zahlen Nr. 1 - 10

0.1.4 Runden von Zahlen



Der höchste Berg Deutschlands ist mit 2962 m die **Zugspitze** in den bayrischen Alpen. Der höchste Berg Baden-Württembergs ist der **Feldberg** mit 1493 m. **Merke**: Zugspitze: rund 3000 m und Feldberg: rund 1500 m.

Um große Zahlen schneller vergleichen zu können, verwendet man gerundete Zahlen. Vor dem Runden ist die **Rundungsstelle** (Zehner, Hunderter, Tausender, …) festzulegen. Die Ziffer, die **rechts** von der Rundungsstelle steht, entscheidet über auf- oder abrunden:

Rundungsstelle (Tausender)

Steht hier eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird **aufgerundet**.

37 589 ≈ 38 000 (aufgerundet)
37 489 ≈ 37 000 (abgerundet)

Steht hier eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird **abgerundet**.

Für gerundete Zahlen verwendet man das Zeichen ≈ (lies „ungefähr“, „rund“)

Beispiele:

a) Runden auf Zehner
2178 ≈ 2180 (aufrunden)
2612 ≈ 2610 (abrunden)

b) Runden auf Hunderter
2371 ≈ 2400 (aufrunden)
3412 ≈ 3400 (abrunden)

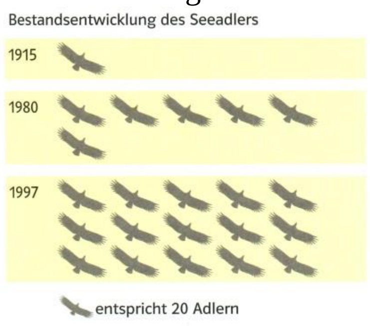
c) Runden auf Tausender
3948 ≈ 4000 (aufrunden)
5499 ≈ 5000 (abrunden)

Übungen: Aufgaben zum Runden Nr. 1 - 9

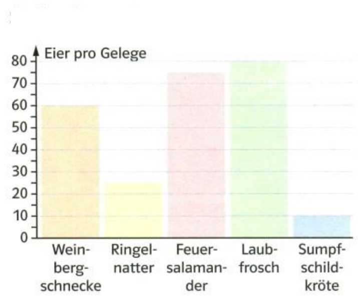
0.1.5 Ordnen und Darstellen von Zahlen

Zahlen lassen sich durch **Diagramme** veranschaulichen. Große Zahlen werden in der Regel vorher **gerundet**.

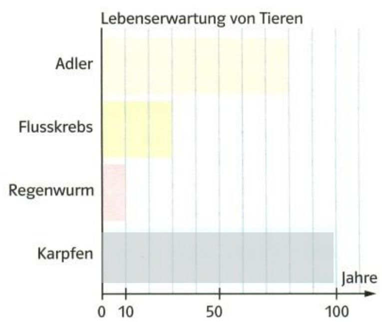
Bilddiagramm



Säulendiagramm



Balkendiagramm



Übungen: Aufgaben zum Ordnen und Darstellen Nr. 1 - 4

0.1.6 Römische Zahlen

Stufenzeichen:	I	X	C	M
	1	10	100	1000
Zwischenzeichen:	V	L	D	
	5	50	500	

Regel	Beispiele
Stehen gleiche Stufenzeichen nebeneinander, so wird addiert	II = 1 + 1 = 2 XXX = 10 + 10 + 10 = 30 CC = 100 + 100 = 200
Steht ein kleineres Zeichen **rechts** neben einem größeren Zeichen, so wird **addiert**.	VI = 5 + 1 = 6 LV = 50 + 5 = 55 CX = 100 + 10 = 110
Steht ein kleineres Zeichen **links** neben einem größeren Zeichen, so wird **subtrahiert**.	IV = 5 – 1 = 4 VL = 50 – 5 = 45 CX = 100 – 10 = 90
Die Stufenzahlen dürfen höchstens dreimal nebeneinander vorkommen.	XXX = 30 ~~XXXX~~, schreibe stattdessen XL = 40
Die Zwischenzeichen dürfen sich nicht wiederholen.	XV = 15 ~~VV~~, schreibe stattdessen X = 10

Übungen: Aufgaben zu römischen Zahlen Nr. 1 und 2

0.1.7 Potenzen

Unser gewohntes Dezimalsystem beruht auf **Zehnerpotenzen**

Zahlwort	Zehnerpotenz	Produkt	Zahl
Eins	10^0	-	1
Zehn	10^1	10	10
Hundert	10^2	10·10	100
Tausend	10^3	10·10·10	1000
Zehntausend	10^4	10·10·10·10	10 000
Hunderttausend	10^5	10·10·10·10·10	100 000
Million	10^6	10·10·10·10·10·10	1 000 000
Milliarde	10^9	...	...
Billion	10^{12}	...	...
Billiarde	10^{15}	...	...
Trillion	10^{18}	...	...
Trilliarde	10^{21}	...	...
Quadrillion	10^{24}	...	...
Quadrilliarde	10^{27}	...	...

Wissenschaftliche Darstellung großer Zahlen: $6\cdot10^8 = 600\,000\,000$

Allgemein gilt
Eine **Potenz** ist ein **Produkt mit gleichen Faktoren**.

Basis Exponent

$$\underbrace{4^3}_{\text{Potenz}} = 4\cdot4\cdot4$$

Beispiele: $5^3 = 5\cdot5\cdot5$ lies: „fünf hoch drei"
$3^5 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$ lies: „drei hoch fünf"

Zum Vergleich:
Ein **Produkt** ist eine **Summe mit gleichen Summanden**:

Faktor Faktor

$$\underbrace{3\cdot4}_{\text{Produkt}} = 4+4+4$$

Beispiele: $3\cdot5 = 5 + 5 + 5$ lies: „drei mal fünf"
$5\cdot3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ lies: „fünf mal drei"

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 1 - 6

0.1.8 Das Binärsystem

Im **Dezimalsystem** wird die Zahl in **Zehnerpotenzen** zerlegt:

Milliarden			Millionen			Tausend					
H 10^{11}	Z 10^{10}	E 10^9	H 10^8	Z 10^7	E 10^6	H 10^5	Z 10^4	E 10^3	H 10^2	Z 10^1	E 10^0
	3	0	0	8	7	2	0	0	1	0	5

$\Rightarrow$ 30 087 200 105 = $3{\cdot}10^{10} + 8{\cdot}10^7 + 7{\cdot}10^6 + 2{\cdot}10^5 + 1{\cdot}10^2 + 5{\cdot}10^0$

Die elektronischen Speicher und Rechenwerke der Computern z.B. in Autos und Mobiltelefonen können nur die Werte 1 (Strom fließt) und 0 (Strom fließt nicht) unterscheiden. Zur Programmierung müssen Zahlen daher in das **Binärsystem** (griech. bini = je zwei) übersetzt werden. Dabei wird die Zahl in **Zweierpotenzen** zerlegt:

	2^{10} 1024	2^9 512	2^8 256	2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1
	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

$\Rightarrow$ $(10\ 110\ 000\ 101)_2 = 1{\cdot}2^{10} + 1{\cdot}2^8 + 1{\cdot}2^7 + 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^0 = 1024 + 256 + 128 + 4 + 1 = 1413$

Um eine Zahl aus dem Dezimalsystem ins Binärsystem zu übersetzen, füllt man sie mit Zweierpotenzen von links nach rechts auf:

2^{11} 2048	2^{10} 1024	2^9 512	2^8 256	2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1
	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1

	passt **nicht**	**passt** Rest	passt **nicht**	**passt** Rest	**passt** Rest	**passt** Rest	**passt** Rest	**passt** Rest	passt **nicht**	passt **nicht**	**passt** Rest	**passt** Rest
1523		499		243	115	51	19	3			1	0

$\Rightarrow$ $1523 = 1{\cdot}10^{10} + 1{\cdot}2^8 + 1{\cdot}2^7 + 1{\cdot}2^6 + 1{\cdot}2^5 + 1{\cdot}2^4 + 1{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 = (10\ 111\ 110\ 011)_2$

Übungen: Aufgaben zum Binärsystem Nr. 1 und 2

0.1.9 Das Hexadezimalsystem

Weil Binärzahlen sehr lang sind, werden bei der Programmierung häufig **Hexadezimalzahlen** (griech. **hexa** = sechs) auf der Basis 16 benutzt. Um die dafür benötigten 16 Ziffern zu erhalten, werden die Zehnerziffern 0 – 9 durch die **Buchstaben A – F** für 10 – 15 ergänzt.

Beispiele:

$(12)_{16} = 1{\cdot}16^1 + 2{\cdot}16^0$
$= 16 + 2$
$= 18$

$(AB)_{16} = A{\cdot}16^1 + B{\cdot}16^0$
$= 10{\cdot}16 + 11{\cdot}1$
$= 160 + 11$
$= 171$

$(3FA)_{16} = 3{\cdot}16^2 + F{\cdot}16^1 + A{\cdot}16^0$
$= 3{\cdot}256 + 15{\cdot}16 + 10{\cdot}1$
$= 768 + 240 + 10$
$= 1018$

$(A3B)_{16} = A{\cdot}16^2 + 3{\cdot}16^1 + B{\cdot}16^0$
$= 10{\cdot}256 + 3{\cdot}16 + 11{\cdot}1$
$= 2560 + 48 + 11$
$= 2619$

$(F09)_{16} = F{\cdot}16^2 + 9{\cdot}16^0$
$= 15{\cdot}256 + 9{\cdot}1$
$= 3840 + 9$
$= 3849$

$(AB0)_{16} = A{\cdot}16^2 + B{\cdot}16^1$
$= 10{\cdot}256 + 11{\cdot}16$
$= 2560 + 176$
$= 2736$

Übungen: Aufgaben zum Hexadezimalsystem Nr. 1 und 2