

0.4. Bruchzahlen

0.4.1. Teilbarkeit

Primzahlzerlegung:

Eine **Primzahl** lässt sich nur durch die 1 teilen und durch sich selbst. Die ersten Primzahlen sind 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; ...

Alle **anderen** Zahlen lassen sich durch fortgesetztes Teilen in **Primfaktoren** zerlegen. $4 = 2 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$; $9 = 3 \cdot 3$; usw.

Beispiele: $92 = 2 \cdot 46$ $120 = 2 \cdot 60$ $122 = 2 \cdot 61$ $123 = 3 \cdot 41$ $124 = 2 \cdot 62$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 23$ $= 2 \cdot 2 \cdot 30$ $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15$ $= 2 \cdot 2 \cdot 31$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Übungen: Aufgaben zur Teilbarkeit Nr. 1

Kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier Zahlen

Das kleinste gemeinsame Vielfache **kgV** zweier Zahlen ist die kleinste Zahl, die die beiden Zahlen als Teiler enthält bzw. das kleinste gemeinsame Glied der beiden **Multiplikationsreihen**.

Beispiele:

$\text{kgV}(2;3) = 6$, denn 2;4;**6**;8;... $\text{kgV}(2;4) = 4$, denn 2;**4**;6;8;... $\text{kgV}(3;4) = 12$, denn 3;6;9;**12**;...
und 3;**6**;9;12;... und 4;8;**12**;16;... und 4;8;**12**;16;...

Übungen: Aufgaben zur Teilbarkeit Nr. 2

0.4.2. Stammbrüche

$1 : 2 = \frac{1}{2}$ bedeutet eine Hälfte oder den halben Teil: 

$1 : 3 = \frac{1}{3}$ bedeutet ein Drittel oder den dritten Teil: 

$1 : 4 = \frac{1}{4}$ bedeutet ein Viertel oder den vierten Teil: 

$1 : 5 = \frac{1}{5}$ bedeutet ein Fünftel oder den fünften Teil: 

Übungen: Aufgaben zu Stammbrüchen Nr. 1 - 16

0.4.3 Echte Brüche

$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ bedeutet zwei Drittel oder zwei dritte Teile: 

$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ bedeutet drei Fünftel oder drei fünfte Teile: 

Echte Brüche

Der **Nenner** gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wurde.

Der **Zähler** gibt an, wie viele dieser Teile genommen wurden.

Alle Brüche sind also **Vielfache** von Stammbrüchen

Zähler $\rightarrow \frac{3}{4}$
Nenner $\rightarrow 4$

Beispiel für die Bestimmung von Zähler und Nenner in Bruchteilen

Aufgabe: Gib die abgebildete Teilstrecke als Bruch an:



Lösung:

Bestimmung des Nenners: Die Gesamtstrecke von 1 m ist in 5 Teile aufgeteilt, also ist 1 Teil = $\frac{1}{5}$ m.

Bestimmung des Zählers: Es sind 4 Teile also $4 \cdot \frac{1}{5} \text{ m} = \frac{4}{5} \text{ m}$.

Prozente

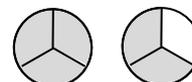
1 Prozent = 1 % bedeutet ein Hundertstel = $\frac{1}{100}$, 2 Prozent = 2 % = zwei Hundertstel = $\frac{2}{100}$, usw.

Übungen: Aufgaben zu echten Brüchen Nr. 1 - 14

Man multipliziert mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler mit dieser Zahl multipliziert: $2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3}$

0.4.4 Unechte Brüche und gemischte Schreibweise

$5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ bedeutet fünf Drittel oder ein Ganzes und zwei Drittel:



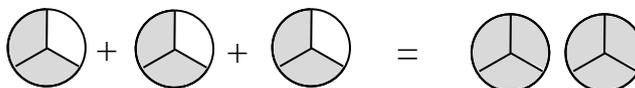
$11 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} = 2 \frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5}$ bedeutet elf Fünftel oder zwei Ganze und 1 Fünftel:



Übungen: Aufgaben zu unechten Brüchen und gemischter Schreibweise Nr. 1 - 14

0.4.5 Brüche als Quotienten

$2:3 = \frac{2}{3}$, denn $3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$:



Ein Bruch ist das Ergebnis der Division von Zähler durch Nenner

Übungen: Aufgaben zu Brüchen als Quotienten natürlicher Zahlen Nr. 1 - 7

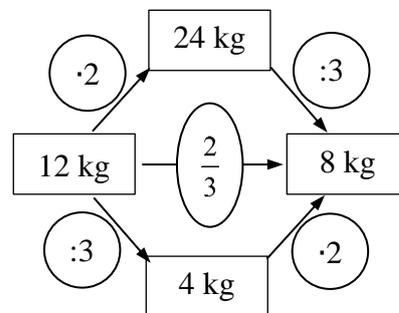
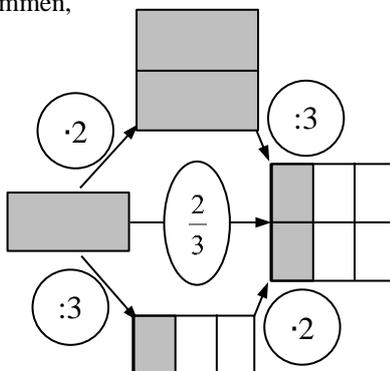
0.4.6 Brüche als Operatoren

Um den **Bruchteil** eines **Ganzen** zu bestimmen, kann man

erst mit dem Zähler multiplizieren und dann durch den Nenner dividieren

oder

erst durch den Nenner dividieren und dann mit dem Zähler multiplizieren



Beispiel:

zwei Drittel von 12 kg sind

ein Drittel des Doppelten (= 24 kg), also 8 kg

oder

das Doppelte eines Drittels (= 4 kg), also 8 kg

Übungen: Aufgaben zu Brüchen als Operatoren Nr. 1 - 4

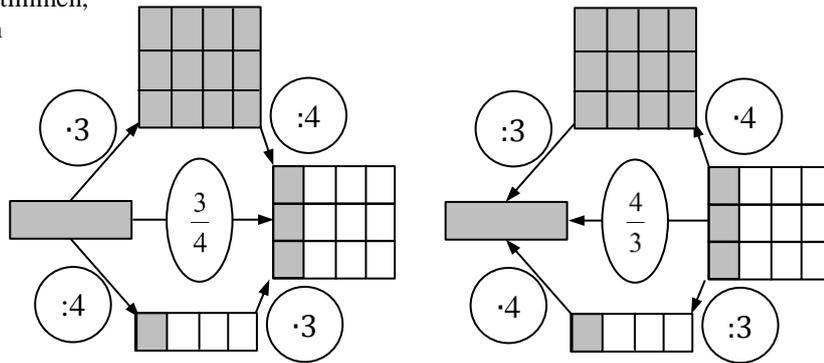
Umkehrung:

Um das **Ganze** eines **Bruchteils** zu bestimmen, wendet man den **Kehrwert** an, bei dem **Zähler und Nenner vertauscht** sind:

erst mit dem Zähler multiplizieren und dann durch den Nenner dividieren

oder

erst durch den Nenner dividieren und dann mit dem Zähler multiplizieren



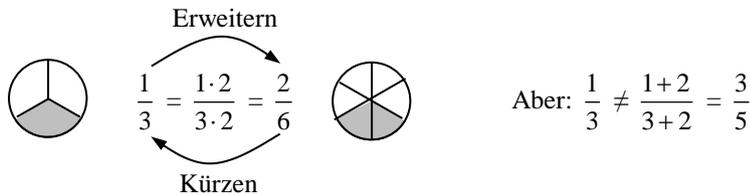
Beispiel:

Drei Viertel von x kg sind 12 kg. Dann ist x gleich vier Drittel von 12 kg = 16 kg.

Übungen: Aufgaben zu Brüchen als Operatoren Nr. 5 - 8

0.4.7 Erweitern

Aufgaben zum Erweitern Nr. 1

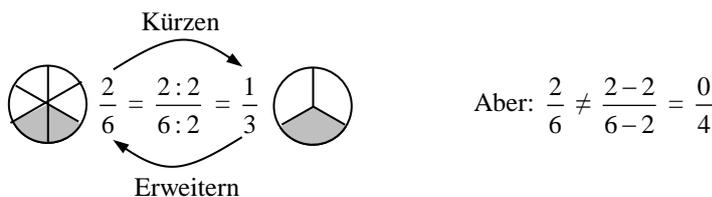


Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit dem gleichen Erweiterungsfaktor multipliziert. Dabei wird die Einteilung verfeinert, aber der Wert des Bruches bleibt gleich.

Aufgaben zum Erweitern Nr. 2 - 13

0.4.8 Kürzen

Aufgaben zum Kürzen Nr. 1



Beim Erweitern werden Zähler und Nenner durch den gleichen Kürzungsdivisor dividiert. Dabei wird die Einteilung vergrößert, aber der Wert des Bruches bleibt gleich.

Aufgaben zum Kürzen Nr. 2 - 7

0.4.9 Größenvergleiche

Aufgaben zu Größenvergleichen Nr. 1 - 3

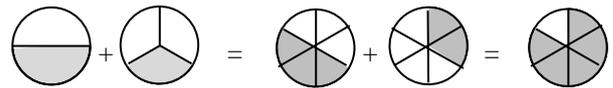
Um zwei Brüche der Größe nach vergleichen zu können, müssen sie auf den gleichen Nenner gebracht werden.

Beispiel: Welcher der beiden Brüche $\frac{5}{8}$ und $\frac{4}{7}$ ist größer? **Antwort:** $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} > \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$, also $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$

Aufgaben zu Größenvergleichen Nr. 4 - 6

0.5.10 Addition und Subtraktion

Bruchteile lassen sich nur dann sinnvoll zusammenzählen, wenn sie gleich groß sind.



Brüche müssen daher auf einen **gleichen Nenner** erweitert werden: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$

Man addiert zwei Brüche, indem man sie auf den gleichen Nenner erweitert und die Zähler addiert.

Aufgaben zur Addition und Subtraktion Nr. 1 - 17

0.4.11 Multiplikation

$\frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3}$ bedeutet vier mal fünf Drittel gleich Zwanzig Drittel, also

Man multipliziert mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler mit dieser Zahl multipliziert.

Aufgaben zur Multiplikation Nr. 1 - 4

$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ bedeutet ein Drittel geteilt durch Zwei oder die Hälfte des dritten Teils gleich ein Sechstel:



Man dividiert durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

Aufgaben zur Multiplikation Nr. 5 - 8

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ bedeutet 2 mal ein Drittel mal 4 mal ein Fünftel: $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{5} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$

Man multipliziert mit einem Bruch, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$

Aufgaben zur Multiplikation Nr. 9 - 19

0.4.12 Division

Wenn man eine Zahl durch sich selbst teilt bzw. mit ihrem Kehrwert multipliziert, muss 1 herauskommen: $2 : 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Das gleiche muss für Brüche gelten: $\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1$. Weil aber auch $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$, muss $\frac{3}{2}$ der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ sein: $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Man erhält den Kehrwert eines Bruches durch Vertauschung von Zähler und Nenner.

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert: $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2}$

Aufgaben zur Division Nr. 1 - 18

0.4.13 Dezimalbrüche

Wiederholung Abschnitt 0.3. Rechnen mit Einheiten

Beim Rechnen mit Einheiten verwendet man ein Komma, um ganze und dezimale Bruchteile voneinander zu trennen:

m	dm	cm	mm	gemischte Schreibweise	Dezimalbruch
3	8	0	0	3 m + 8 dm	3,8 m = 38 dm = 380 cm = 3800 mm
0	3	8	0	3 dm + 8 cm	0,38 m = 3,8 dm = 38 cm = 380 mm
0	0	3	8	3 cm + 8 mm	0,038 m = 0,38 dm = 3,8 cm = 38 mm

Dabei bedeuten

- **Dezimeter** dm = **Zehntel**meter = $\frac{1}{10}$ m
- **Zentimeter** cm = **Hundertstel**meter = $\frac{1}{100}$ m
- **Millimeter** mm = **Tausendstel**meter = $\frac{1}{1000}$ m

Ebenso lässt sich die Stellenwerttafel im Dezimalsystem auf dezimale Bruchteile fortsetzen:

H 100	Z 10	E 1	z $\frac{1}{10}$	h $\frac{1}{100}$	t $\frac{1}{1000}$	gemischte Schreibweise	Dezimalbruch
3	8	0	0	0	0	300 + 80	380,000
0	3	8	0	0	0	30 + 8	38,000
0	0	3	8	0	0	$3 + \frac{8}{10}$	3,800
0	0	0	3	8	0	$\frac{3}{10} + \frac{8}{100}$	0,380
0	0	0	0	3	8	$\frac{3}{100} + \frac{8}{1000}$	0,038

Aufgaben zu Dezimalbrüchen Nr. 1 - 3

Addition und Subtraktion

Beispiele:

	3	2	5	1	
+	2	8	6	3	
	1	1			
	6	1	1	4	

	7	6	4	5	4
-	3	8	9	1	5
	1	1			
	3	7	3	6	1

Dezimalzahlen lassen sich wie natürliche Zahlen **schriftlich addieren** bzw. **subtrahieren**.

Aufgaben zu Dezimalbrüchen Nr. 4 -

$$12 \text{ m}^2 : 6 \text{ m}^2 = \frac{12 \cdot \text{m}^2}{6 \cdot \text{m}^2} = 2, \text{ denn } 2 \cdot 6 \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2$$

Wird eine Fläche von 12 m^2 in 6 m^2 große Teile geteilt, so erhält man 2 Stück:

