1.3. Gleichungen und Ungleichungen

1.3.1. Mengen

Mengendarstellungen
Endliche Mengen lassen sich in **aufzählender Darstellung** durch Angabe aller Elemente angeben. **Unendliche** Mengen müssen in der Regel in **beschreibende Darstellung** angegeben werden. Dabei werden die folgenden Abkürzungen benutzt:

$\mathbb{N}$ = {0,1,2,3,...} = Menge der **natürlichen Zahlen**

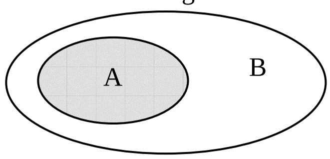
$\in$ = (Element) aus
: = für die gilt:
$<$ = echt kleiner
$>$ = echt größer
$\leq$ = kleiner oder gleich
$\geq$ = größer oder gleich

Beispiele
1. A $= \{1,2,3, ..., 100\}$ (aufzählende Darstellung)
   $= \{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq 100\}$ (beschreibende Darstellung)
   = Menge aller x aus $\mathbb{N}$, für die gilt: $1 \leq x \leq 100$
2. $A_u = \{x \in A: x \text{ ungerade}\}$
3. $A_g = \{x \in A: x \text{ gerade}\}$
4. $A_2 = \{x \in A: x \leq 10\}$

Übungen: Aufgaben zu Gleichungen und Ungleichungen Nr. 1 und 2

Mengenrelationen
Für die Beziehungen (Relationen) zwischen zwei Mengen verwendet man die folgenden Abkürzungen:

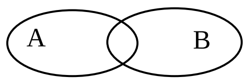
$A \subset B$ $\Leftrightarrow$ A ist enthalten in B
$\Leftrightarrow$ alle Elemente aus A liegen auch in B
$\Leftrightarrow$ B enthält A
$\Leftrightarrow$ $B \supset A$



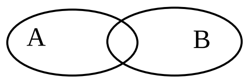
Beispiele
1. $A \subset A_u$
2. $A_g \supset A$

Mengenverknüpfungen
Häufig lässt sich eine Menge am einfachsten durch Verknüpfung zweier anderer Mengen beschreiben:

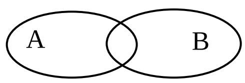
$A \cup B$ = A **vereinigt** B
= Menge aller Elemente, die in A **oder** B liegen



$A \cap B$ = A **geschnitten** B
= Menge aller Elemente, die in A **und** B liegen



$A \setminus B$ = A **ohne** B
= Menge aller Elemente, die in A **und nicht** in B liegen



Beispiele
1. $A \setminus A_u = A_g$
2. $A_g \cup A_u = A$
3. $A_g \cap A_u = \{\}$

Übungen: Aufgaben zu Gleichungen und Ungleichungen Nr. 3

Weitere Zahlenmengen

$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$ = Menge der **ganzen** Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{z_1}{z_2} : z_1 \in \mathbb{Z} \text{ und } z_2 \in \mathbb{Z}^*\}$ = Menge der **rationalen** Zahlen

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 0\}$

offensichtlich ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

1.3.2. Gleichungen

Definitionen

Term: = Rechenausdruck
z.B. $2x - 4$, $\frac{1}{x-2}$ und $(2x - 4)^2$

Definitionsmenge D = Menge der Zahlen x, für die der Term definiert ist
z.B. für $2x - 4$ ist $D = \mathbb{R}$ und für $\frac{1}{x-2}$ ist $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Lösungsmenge L: = Menge der Zahlen x, für die eine Gleichung oder Ungleichung erfüllt ist,
z.B. für $2x - 4 = 0$ ist $L = \{2\}$ und für $2x - 4 < 0$ ist $L =]-\infty; 2[$

Definition und Satz über Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Äquivalenzumformungen lassen die Lösungsmenge der Gleichung unverändert. Man kann auf **beiden Seiten** der Gleichung:

1. den gleichen **Term** (also auch die beiden Seiten einer anderen **Gleichung**!) **addieren**
2. mit dem gleichen **Term ≠ 0 multiplizieren**.

Beispiel:

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{2x-5}{x+1} - 2 = \frac{x+1}{3}$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (Für $x = -1$ ist der Bruchterm nicht definiert)

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-5}{x+1} - 2 &= \frac{3x+1}{3} && |\cdot 3(x+1) \text{ (auf beiden Seiten mit dem Hauptnenner multiplizieren)} \\
3\cdot(x^2+2x-5) - 2\cdot 3\cdot(x+1) &= (3x+1)\cdot(x+1) && | \text{ Klammern auflösen} \\
3x^2 + 6x - 15 - 6x + 6 &= 3x^2 + 4x + 1 && | \text{ Zusammenfassen} \\
3x^2 - 11 &= 3x^2 + 4x + 1 && | +(-3x^2); +(-1) \text{ (auf beiden Seiten den gleichen Term addieren)} \\
-12 &= 4x && |\cdot \frac{1}{4} \\
-3 &= x
\end{aligned}
$$

Lösungsmenge $L = \{-3\}$

Übungen: Aufgaben zu Gleichungen und Ungleichungen Nr. 4 - 6

1.3.3. Ungleichungen

Satz über Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Ungleichungen können bis auf eine Ausnahme ebenso wie Gleichungen mit Hilfe der beiden Äquivalenzumformungen nach x aufgelöst werden. Bei der **Multiplikation** mit einer **negativen** Zahl kehrt sich das Relationszeichen um!

Beispiel:

Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $4 - 3x \leq 2$

$$
\begin{aligned}
4 - 3x &\leq 2 && | + 4 \text{ (auf beiden Seiten den gleichen Term addieren)} \\
-3x &\leq 6 && | \cdot (-\tfrac{1}{3}) \text{ (mit einer negativen Zahl multiplizieren} \Rightarrow \text{das Relationszeichen dreht sich um!} \\
x &\geq -2
\end{aligned}
$$

Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq -2\}$

Übungen: Aufgaben zu Gleichungen und Ungleichungen Nr. 7