1.4. Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen (LGS)

Aufgabe 1: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren
Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme an. Verwende ein Verfahren eigener Wahl.

a) $\left|\begin{array}{ll} 2x+y & =7 \\ 5x+y & =13 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{ll} 4x+3y & =7 \\ 5x+4y & =9 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{ll} 3x_1+x_2 & =1 \\ 5x_1+2x_2 & =-1 \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{ll} -5u+2v & =-1 \\ 6u-v & =2 \end{array}\right|$

e) $\left|\begin{array}{ll} 4x+3y & =2 \\ 3x+y & =-1 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{ll} a+2b & =5 \\ -a+3b & =3 \end{array}\right|$ g) $\left|\begin{array}{ll} 2x-5y & =1 \\ 3x+3y & =5 \end{array}\right|$ h) $\left|\begin{array}{ll} a+2b & =3 \\ 2a+4b & =5 \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{ll} 5x+2y & =4 \\ x-2y & =6 \end{array}\right|$ j) $\left|\begin{array}{ll} -2a+b & =3 \\ 3a-b & =4 \end{array}\right|$ k) $\left|\begin{array}{ll} 2x+y & =-1 \\ 3x+4y & =-3 \end{array}\right|$ l) $\left|\begin{array}{ll} -3a-2b & =0 \\ a+4b & =1 \end{array}\right|$

Aufgabe 2: Diagonalverfahren
Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme an. Verwende das Diagonalverfahren.

a) $\left|\begin{array}{lcr} x+y+z & = & 0 \\ -x+y & = & -1 \\ 2x-y-z & = & 3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{lcr} -3x+2y-5z & = & 7 \\ -2x+y+z & = & 8 \\ 3y+4z & = & 13 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{lcr} 2u+v+w & = & 3 \\ u-v & = & 1 \\ u-v-2w & = & -1 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{lcr} 2x+y+z & = & 1 \\ 4x+y+3z & = & 1 \\ -2x+2y+z & = & 7 \end{array}\right|$ e) $\left|\begin{array}{lcr} a-2b+3c & = & -1 \\ 2a+b-4c & = & 3 \\ 3a+2b-5c & = & 7 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{lcr} 2x_1-x_2+x_3 & = & -8 \\ 3x_1+x_2-2x_3 & = & 1 \\ -5x_1+2x_2-x_3 & = & 15 \end{array}\right|$

Aufgabe 3: Matrizenschreibweise
Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme an. Formuliere die LGS in Matrizenschreibweise und wende das Diagonalverfahren an.

a) $\left|\begin{array}{lcr} 2x_1+x_2-2x_3+3x_4 & = & 2 \\ x_1+2x_2+x_3-4x_4 & = & 8 \\ -x_1+3x_2-4x_3+x_4 & = & 0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4 & = & 6 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{lcr} a+3b+2c+10d & = & 16 \\ 2a+7b+c+22d & = & 32 \\ 3a+11b+6c+37d & = & 55{,}5 \\ a+3b+5c+11d & = & 19{,}5 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{lcr} a+b+c+d & = & -2 \\ -a+b-c+d & = & -10 \\ 3a+2b+c+2d & = & -2 \\ -2b+d & = & 0 \end{array}\right|$

Aufgabe 4: Lösungsmengen von LGS

1. Bestimme die Lösungsmenge L_{inh} der folgenden linearen Gleichungssysteme in der gegebenen („**inhomogenen**") Form
2. Bestimme anschließend die Lösungsmenge L_{hom} für den Fall, dass auf der rechten Seite **nur Nullen** stehen („**homogene**") Form.
3. Vergleiche L_{inh} und L_{hom}. Was fällt Dir auf?

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ e) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ f) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & -1 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$ h) $\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right)$ i) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 12 & -6 & 8 \\ -1 & -6 & 3 & -4 \end{array}\right)$

1.4. Lösungen zu den Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen (LGS)

Aufgabe 1: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ h) $L = \{\}$

i) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Diagonalverfahren

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Matrizenschreibweise

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Lösungsmengen von LGS

a) $L_{inh} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$ und $L_{hom} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) $L_{inh} = \left\{ \quad \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

c) $L_{inh} = \left\{ \quad \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

d) $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

e) $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

f) $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

g) $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

h) $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in R \right\}$

i) $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in R \right\}$ und $L_{hom} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in R \right\}$

Vergleich:

Für $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}$ gilt $L_{hom} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (siehe a))

Für $L_{inh} = \left\{ \quad \right\}$ gilt $L_{hom} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in R \right\}$ (siehe b) und c))

Für $L_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, s, t \in R \right\}$ gilt $L_{hom} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, s, t \in R \right\}$ (siehe d) - i))