1.4. Prüfungsaufgaben zu LGS

Aufgabe 0: 2x2 LGS

Bestimme den Lösungsvektor des nebenstehenden LGS nach dem

a) Einsetzungsverfahren
b) Gleichsetzungsverfahren
c) Additionsverfahren.

$$\begin{array}{l|lcl|} (1) & 3x + 2y & = & 1 \\ (2) & 4x - y & = & 2 \end{array}$$

Lösungen:

a) Einsetzungsverfahren

Gleichung (1) nach y auflösen:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 && | -3y \\ 2y &= 1 - 3x && | :2 \\ y &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Eliminierung von y und Berechnung von x durch **Einsetzen** von (1) in (2):

$$\begin{aligned} 4x - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right) &= 2 && | \text{ Klammern auflösen} \\ 4x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x &= 2 && | \text{ zusammenfassen} \\ \frac{11}{2}x - \frac{1}{2} &= 2 && | + \frac{1}{2} \\ \frac{11}{2}x &= \frac{5}{2} && | : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{5}{11} \end{aligned}$$

Berechnung von y durch **Einsetzen** von $x = \frac{5}{11}$ in eine der beiden Gleichungen, z.B. Gleichung (1):

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{5}{11} + 2y &= 1 && | - \frac{15}{11} \\ 2y &= -\frac{4}{11} && | :2 \\ y &= -\frac{2}{11} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$

b) Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach **derselben Unbekannten** aufgelöst, z.B. y:

$$\begin{array}{ll|lll|l} (1) & & 3x + 2y & = & 1 & -3x;\ :2 \\ (2) & & 4x - y & = & 2 & +y;\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l|} (1) & & y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ (2) & & y = 4x - 2 \end{array}$$

Eliminierung von x und Berechnung von y durch **Gleichsetzen** der beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x & = & 4x - 2 & \mid + \frac{3}{2}x;\ +2 \\ \frac{5}{2} & = & \frac{11}{2}x & \mid \cdot \frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & = & x & \end{array}$$

Berechnung von y durch **Einsetzen** von $x = \frac{5}{11}$ in eine der beiden Gleichungen, z.B. Gleichung (2):

$$y = 4 \cdot \frac{5}{11} - 2 = \frac{20}{11} - \frac{22}{11} = -\frac{2}{11}$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$

c) Additionsverfahren

$$\begin{array}{ll|lll|l} (1) & & 3x + 2y & = & 1 & \cdot(-4) \\ (2) & & 4x - y & = & 2 & \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|lll|ll} (1) & & -12x - 8y & = & -4 & & :(-4) \\ (2) & & 12x - 3 & = & 6 & + & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|lll|l} (1) & & 2x - 3y & = & 1 & \\ (2) & & -11y & = & 2 & :11;\ \cdot 2 \end{array}$$

Ebenso verfährt man nun mit den Koeffizienten vor y:

$$\begin{array}{ll|lll|l} (1) & & 3x + 2y & = & 1 & + \\ (2) & & -2y & = & \frac{4}{11} & :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|lll|l} (1) & & 3x & = & \frac{15}{11} & :3 \\ (2) & & y & = & -\frac{2}{11} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: 2x2 LGS
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssyteme:

$$\text{a)}\left|\begin{array}{rcrcr} -3x & + & \frac{2}{5}y & = & -1 \\[4pt] \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{9}y & = & -\frac{2}{9} \end{array}\right| \quad \text{b)}\left|\begin{array}{rcrcr} \frac{1}{2}x & + & \frac{2}{5}y & = & 4 \\[4pt] \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{4}y & = & \frac{1}{12} \end{array}\right| \quad \text{c)}\left|\begin{array}{rcrcr} -\frac{3}{2}x & + & \frac{1}{2}y & = & 3 \\[4pt] -\frac{1}{2}x & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \end{array}\right|$$

$$\text{d)}\left|\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 4y & = & 10 \end{array}\right| \quad \text{e)}\left|\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -5 \\ 3x & + & y & = & -2 \end{array}\right| \quad \text{f)}\left|\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4 & = & y \\ 3x & + & y & = & 6 \end{array}\right|$$

Lösungen
a) $(x|y) = (1|5)$
b) $(x|y) = (4|5)$
c) $(x|y) = (-1|3)$
d) $(x|y) = (2|1)$
e) $(x|y) = (-1|1)$
f) $(x|y) = (2|0)$

Aufgabe 2: 3x3 LGS
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssyteme:

$$\text{a)}\left|\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}\right|$$

$$\text{b)}\left|\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -15 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -6 \end{array}\right|$$

$$\text{c)}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \\ -5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 11 \end{array}\right|$$

$$\text{d)}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

Lösungen

Beispielrechnung für Teil a):

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \qquad\qquad \cdot 3 \\ \cdot 2 \quad + \qquad\quad + \\ \qquad\qquad \cdot 2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & 5x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & -3x_2 & + & 11x_3 & = & 30 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \quad + \\ \cdot 5 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & 5x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & & + & 52x_3 & = & 156 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ :52 \end{array}$$

a) $(x_1|x_2|x_3) = (2|1|3)$

b) $(x_1|x_2|x_3) = (1|-2|4)$

c) $(x_1|x_2|x_3) = (-2|1|0)$

d) $(x_1|x_2|x_3) = (3|-1|1)$

Aufgabe 3: 4 x 4 LGS
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 10 \end{array}\right|$$

Lösung: $(x_1|x_2|x_3|x_4) = (7|5|-3|2)$

Aufgabe 4: 4 x 4 LGS in Matrizenschreibweise
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssyteme:

a) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Lösungen:

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 11 & 0 & 15 & 42 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & -22 & 92 & 302 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 5: 3 x 3 LGS in Matrizenschreibweise mit unendlich viele Lösungen
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 3 & -3 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & -3 \end{array}\right)$

Lösungen:

a) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in R \right\}$

b) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in R \right\}$