

1.4. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

In vielen mathematischen Problemen werden zwei Zahlen x und y gesucht, die gleichzeitig zwei verschiedenen Gleichungen (1) und (2) genügen müssen. Man spricht dann von einem **Gleichungssystem** aus zwei Gleichungen für zwei Variable. Enthalten die Gleichungen nur lineare Ausdrücke ohne Quadrate, Wurzeln oder andere Potenzen, so handelt es sich um ein **lineares Gleichungssystem (LGS)**

Beispiel für ein nichtlineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2y = 1 \\ 2^x + y^2 = 7 \end{array} \right|$$

Beispiel für ein lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right|$$

Um die Lösung eines **LGS** aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen zu erhalten, muss zunächst eine der beiden Variablen in der Gleichung (2) mit Hilfe von Gleichung (1) **eliminiert (entfernt)** werden. Dies erreicht man mit speziellen **Eliminierungsverfahren**, nämlich, dem **Einsetzungs-**, **Gleichsetzungs-** oder **Additionsverfahren**. Enthält Gleichung (2) nur noch eine Variable, so kann sie nach dieser aufgelöst werden. Das Ergebnis kann dann in Gleichung (1) eingesetzt werden, um die andere Variable zu berechnen.

Die **Einsetzungs-** und **Gleichsetzungsverfahren** sind theoretisch (!) **immer** anwendbar, während das **Additionsverfahren** in der Regel nur bei **linearen Gleichungssystemen** erfolgreich ist. Es lässt sich aber dafür sehr leicht auch auf Systeme aus **drei und mehr Gleichungen und Unbekannten** ausbauen.

1.4.1. Das Einsetzungsverfahren

Eine der Gleichungen wird nach einer Unbekannten aufgelöst, z.B. Gleichung (1) nach x :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right| \begin{array}{l} +3y; :2 \\ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y \\ 3x + y = 7 \end{array} \right|$$

Eliminierung von y und Berechnung von x durch **Einsetzen** von Gl. (1) in Gl. (2)

$$3\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y\right) + y = 7 \quad | \text{ Klammern auflösen}$$
$$\frac{3}{2} + \frac{11}{2}y = 7 \quad | - \frac{3}{2}$$
$$\frac{11}{2}y = \frac{11}{2} \quad | \cdot \frac{2}{11}$$
$$y = 1$$

Berechnung von x durch **Einsetzen** von $y = 1$ in eine der beiden Gleichungen, z.B. Gleichung (1):

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 1 = 2$$
$$\Rightarrow \text{Lösungsvektor } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4.2. Das Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach **derselben Unbekannten** aufgelöst, z.B. x:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right| \begin{array}{l} +3y; :2 \\ -y; :3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y \\ x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}y \end{array} \right|$$

Eliminierung von y und Berechnung von x durch **Gleichsetzen** der beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}y \quad | +\frac{1}{3}y; -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{6}y = \frac{11}{6} \quad | \cdot \frac{6}{11} \\ y = 1 \end{array}$$

Berechnung von y durch **Einsetzen** von y = 1 in eine der beiden Gleichungen, z.B. Gleichung (1):

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 1 = 2 \\ \Rightarrow \text{Lösungsvektor } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.4.3. Das Additionsverfahren

Die Eliminierung der Variablen x und die Berechnung von x und y geschieht **ohne Einsetzen** nur durch geschickte **Äquivalenzumformungen**.

Um x zu eliminieren, bringt man die beiden Koeffizienten von x auf das **kleinste gemeinsame Vielfache**. (den „kleinsten gemeinsamen Nenner“). Außerdem wählt man die Vorzeichen der Faktoren so, dass sich die beiden Koeffizienten **im Vorzeichen unterscheiden**. Nun **addiert** man beide Seiten von Gleichung (1) zu Gleichung (2), wobei sich die Koeffizienten vor x aufheben.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -6x + 9y = -3 \\ 6x + 2y = 14 \end{array} \right| \begin{array}{l} \curvearrowright + \\ \curvearrowleft + \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 11y = 11 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ :11; :3 \end{array}$$

Ebenso verfährt man nun mit den Koeffizienten vor y:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3y = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \curvearrowright + \\ \end{array} \quad :3$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x = 4 \\ y = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} :2 \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsvektor } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungen: *Aufgaben zu LGS Nr. 1*

1.4.4. Das Diagonalverfahren

Das Diagonalverfahren ist ein spezielles **Additionsverfahren** mit dem sich LGS mit vielen Gleichungen und vielen Unbekannten schnell und sicher lösen lassen. Man verwendet **Äquivalenzumformungen**, um das LGS auf **Diagonalform** zu bringen, so dass sich die Lösungen ohne Einsetzen direkt ablesen lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc|c} 2x & + & y & - & z = 0 \\ x & - & 2y & + & z = 3 \\ 3x & + & 2y & - & 2z = -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-2) \curvearrowright \\ \cdot 3 \curvearrowright \\ \cdot(-2) \curvearrowright \end{array} \\ \\ \left| \begin{array}{cccc|c} 2x & + & y & - & z = 0 \\ & & 5y & - & 3z = -6 \\ - & & y & + & z = 2 \end{array} \right| \cdot 5 \curvearrowright + \\ \\ \left| \begin{array}{cccc|c} 2x & + & y & - & z = 0 \\ & & 5y & - & 3z = -6 \\ & & & & 2z = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 2 \curvearrowright \\ \cdot 3 \curvearrowright \end{array} + \cdot 2 \curvearrowright + \\ \\ \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & + & y & = 2 \\ & & 10y & = 0 \\ & & & z = 2 \end{array} \right| \cdot (-40) \curvearrowright + \\ \\ \left| \begin{array}{ccc|c} 2x & & & = 2 \\ & y & & = 0 \\ & & & z = 2 \end{array} \right| \cdot 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsvektor} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übungen: Aufgaben zu LGS Nr. 2

1.4.5. LGS in Matrizenschreibweise

Bei größeren LGS verwendet man oft die Matrizenschreibweise: die Variablen werden nicht mehr ausgeschrieben und die Gleichheitszeichen durch einen einfachen senkrechten Strich angedeutet:

Beispiel:

LGS in Gleichungsschreibweise

$$\left| \begin{array}{cccc|c} -x & + & y & + & 2z & - & u = 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2u = 5 \\ 3x & - & y & + & z & - & u = 0 \\ x & + & y & + & z & - & 2u = -2 \end{array} \right|$$

LGS in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \curvearrowright + \\ \cdot 3 \curvearrowright + \\ \cdot 3 \curvearrowright + \end{array} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot (-2) \curvearrowright + \\ \cdot (-2) \curvearrowright + \end{array} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -13 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & | & -21 \end{pmatrix} \cdot 3 \curvearrowright +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & | & -60 \end{pmatrix} : (-15)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \cdot 4 \curvearrowright + \quad \left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \cdot (-3) \curvearrowright + \quad \cdot (-2) \curvearrowright +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \cdot (-1) \curvearrowright +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsvektor } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Übungen: Aufgaben zu LGS Nr. 3

1.4.6. Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

LGS können keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben:

Beispiel für ein LGS, das keine Lösung besitzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \cdot (-2) \curvearrowright + \quad \cdot (-1) \curvearrowright +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -2 & | & -5 \\ 0 & -1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \cdot (-1) \curvearrowright +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung $0 = 4$ ist für **kein** z erfüllt. Es gibt also keinen Lösungsvektor, der alle drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt, d.h., $L = \{ \}$.

Beispiel für ein LGS, das viele Lösung besitzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & 3 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \curvearrowright + \\ \\ \end{matrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 4 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \curvearrowright + \cdot (-2) \\ \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung $0 = 0$ ist für **alle** z erfüllt. Die Variable z kann also frei gewählt werden und wird als **Parameter** aufgefasst, z.B. $z = t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 3 \\ z = t \end{cases}$$

Die anderen beiden Variablen können nun durch Einsetzen in Abhängigkeit von t dargestellt werden:

$$2y + z = 3 \Leftrightarrow 2y + t = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$$
$$x + y = 3 \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$$

Die Lösungsvektoren hängen also von t ab:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 + 0,5t \\ 1,5 - 0,5t \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Der Übersicht halber stellt man die Anteile mit und ohne Abhängigkeit von t getrennt dar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Die Lösbarkeit eines LGS lässt sich erst erkennen, wenn man es auf Dreiecksform gebracht hat. Ein LGS mit m Gleichungen (=Zwangsbedingungen) für n Variablen (=Freiheitsgrade) in **Dreiecksform** hat

- **keine** Lösung, wenn $m > n$ (letzte Gleichung in der Gestalt $0z = b$ mit $b \neq 0$)
- **eine** Lösung, wenn $m = n$ (letzte Gleichung in der Gestalt $az = b$ mit $a \neq 0$)
- **unendlich viele** Lösungen, wenn $m < n$ (letzte Gleichung in der Gestalt $0z = 0$)

Übungen: Aufgaben zu LGS Nr. 4