1.5. Prüfungsaufgaben zur Wurzelrechnung

Aufgabe 1: Intervallschreibweise
Schreibe als Intervall

a) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x < 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x\}$ c) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 10\}$ d) $\{x \in \mathbb{R}: x < 10\}$

Lösungen

a)	$\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x < 4\} = [-10; 4[$	(1)
b)	$\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x\} = [-10; \infty[$	(1)
c)	$\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 10\} =]-10; 4[$	(1)
d)	$\{x \in \mathbb{R}: x < 10\} =]-\infty; 10[$	(1)

Aufgabe 2: Rechenregeln für Wurzelausdrücke
Vereinfache:

a)	$\sqrt{(5a)^2-(4a)^2}$	g)	$\sqrt{8}-\sqrt{3}\;\;{}^{2}$	m)	$3\sqrt{t^4+2t^2}\;-t\sqrt{4t^2+8}$
b)	$(\sqrt{8}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}$	h)	$\sqrt{8}-\sqrt{3}\;\;\sqrt{8}+\sqrt{3}$	n)	$3\sqrt{a^4-3a^2}\;-a\sqrt{4a^2-12}$
c)	$(\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})$	i)	$(\sqrt{48a}-\sqrt{3a})^2$	o)	$\sqrt{9x^2+12xy+4y^2}$
d)	$(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$	j)	$\dfrac{\sqrt{a^2-9}}{\sqrt{a+3}}$	p)	$\sqrt{\frac{1}{4}u^2+uv+v^2}$
e)	$x\sqrt{a}+2y\sqrt{b}+3x\sqrt{a}-y\sqrt{b}$	k)	$\sqrt{\frac{1}{3}x}\;\;\sqrt{27x^3}+\sqrt{75x^3}$	q)	$\sqrt{2x^2+x\sqrt{6x^2-(x\sqrt{2})^2}}$
f)	$2x\sqrt{a}-a\sqrt{x}-x\sqrt{a}-a\sqrt{x}$	l)	$\sqrt{125y}-\sqrt{80y}\;\;\sqrt{\frac{1}{5}y^3}$	r)	$\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x-y}}$

Lösungen

a)	$\sqrt{(5a)^2-(4a)^2} = 3a$	(2)
b)	$(\sqrt{8}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6} = 11-2\sqrt{6}$	(2)
c)	$(\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5}) = -3$	(2)
d)	$(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 7$	(2)
e)	$x\sqrt{a}+2y\sqrt{b}+3x\sqrt{a}-y\sqrt{b} = 4x\sqrt{a}+y\sqrt{b}$	(2)
f)	$2x\sqrt{a}-a\sqrt{x}-x\sqrt{a}-a\sqrt{x} = x\sqrt{a}-2a\sqrt{x}$	(2)
g)	$\sqrt{8}-\sqrt{3}\;\;{}^{2} = 8-2\sqrt{24}+3 = 11-2\sqrt{24}$	(3)
h)	$\sqrt{8}-\sqrt{3}\;\;\sqrt{8}+\sqrt{3} = 8-3 = 5$	(2)
i)	$(\sqrt{48a}-\sqrt{3a})^2 = 27a$	(2)
j)	$\dfrac{\sqrt{a^2-9}}{\sqrt{a+3}} = \sqrt{a-3}$	(2)
k)	$\sqrt{\frac{1}{3}x}\;\;\sqrt{27x^3}+\sqrt{75x^3} = 3x^2+5x^2 = 8x^2$	(4)
l)	$\sqrt{125y}-\sqrt{80y}\;\;\sqrt{\frac{1}{5}y^3} = 5y^2-4y^2 = y^2$	(3)
m)	$3\sqrt{t^4+2t^2}\;-t\sqrt{4t^2+8} = t\cdot\sqrt{t^2+2}$	(2)
n)	$3\sqrt{a^4-3a^2}\;-a\sqrt{4a^2-12} = a\cdot\sqrt{a^2-3}$	(2)
o)	$\sqrt{9x^2+12xy+4y^2} = 3x+2y$	(3)

p) $\sqrt{\frac{1}{4}u^2 + uv + v^2} = \frac{1}{2}u + v$ (3)

q) $\sqrt{2x^2 + x\sqrt{6x^2 - (x\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2x^2 + x\sqrt{6x^2 - 2x^2}} = \sqrt{2x^2 + x\sqrt{4x^2}} = \sqrt{2x^2 + x \cdot 2x} = 2x$ (3)

r) $\frac{x-y}{x+y} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y}$ (2)

Aufgabe 3: Teilweises Wurzelziehen
Ziehe die Wurzeln teilweise:

a) $\sqrt{288}$ b) $\sqrt{242}$ c) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt{98}$

Lösungen

a) $\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ (1)

b) $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$ (1)

c) $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$ (1)

d) $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ (1)

Aufgabe 4: Rechenregeln für Wurzelausdrücke und teilweises Wurzelziehen
Ziehe die Wurzeln teilweise, mache den Nenner wurzelfrei und vereinfache soweit wie möglich:

a)	$\frac{6}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3}$	g)	$\frac{\sqrt{75} - \sqrt{48t^2}}{\sqrt{108}}$	m)	$\frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{112} - \sqrt{63}}$
b)	$\frac{10}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{5}$	h)	$\frac{\sqrt{98t^2} - \sqrt{50}}{\sqrt{32t^2}}$	n)	$\frac{\sqrt{80} - \sqrt{45}}{\sqrt{28} + \sqrt{175}}$
c)	$\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}x\sqrt{x}$	i)	$\frac{\sqrt{63x^3} - \sqrt{28x^3}}{\sqrt{7x}}$	o)	$\frac{2\sqrt{s} + \sqrt{t}}{\sqrt{s} + \sqrt{t}}$
d)	$\frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$	j)	$\frac{\sqrt{20a^3} + \sqrt{45a^3}}{\sqrt{5a}}$	p)	$\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
e)	$\frac{\sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{8}}$	k)	$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$	q)	$\frac{1}{\sqrt{5x} + \sqrt{4x}}$
f)	$\frac{\sqrt{54} - \sqrt{24}}{\sqrt{125}}$	l)	$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$	r)	$\frac{1}{\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}}$

Lösungen

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ (2)

b) $\frac{10}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$ (2)

c) $\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ (2)

d) $\frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$ (2)

e) $\frac{\sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$ (2)

f) $\frac{\sqrt{54} - \sqrt{24}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{25}$ (2)

g) $\frac{\sqrt{75} - \sqrt{48t^2}}{\sqrt{108}} = \frac{5 - 4t}{6}$ (2)

h) $\dfrac{\sqrt{98t^2}-\sqrt{50}}{\sqrt{32t^2}} = \dfrac{7t-5}{4t}$ (2)

i) $\dfrac{\sqrt{63x^3}-\sqrt{28x^3}}{\sqrt{7x}} = 3x - 2x = x$ (3)

j) $\dfrac{\sqrt{20a^3}+\sqrt{45a^3}}{\sqrt{5a}} = 2a + 3a = 5a$ (3)

k) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ (1)

l) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$ (1)

m) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{112}-\sqrt{63}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{21}}{7}$ (2)

n) $\dfrac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{\sqrt{28}+\sqrt{175}} = \dfrac{\sqrt{5}}{7\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{35}}{49}$ (2)

o) $\dfrac{2\sqrt{s}+\sqrt{t}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}} = \dfrac{2s-\sqrt{st}-t}{s-t}$ (2)

p) $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a+\sqrt{ab}-2b}{a-b}$ (2)

q) $\dfrac{1}{\sqrt{5x}+\sqrt{4x}} = \dfrac{\sqrt{5x}-\sqrt{4x}}{x}$ (2)

r) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{3}$ (2)

Aufgabe 5: Quadratische Gleichungen
Gib die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:
a) $x^2 = -9$
b) $(2x - 3)^2 = (x - 6)^2$
c) $x^2 = 9$
d) $(2x + 3)^2 = (x + 6)^2$

Lösungen
a) L = {}
b) L = {± 3}
c) L = {± 3}
d) L = {}

Aufgabe 6: Wurzelgleichungen
Gib die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen an und denke an die Probe!
a) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 0$
b) $2 + \sqrt{x} - \sqrt{x+8} = 0$
c) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = 0$
d) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$
e) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
f) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x}$

Lösungen
a) Rechnung ergibt x = 1, aber wegen Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ist L = {}.
b) L = {1}
c) Rechnung ergibt x = 3, aber wegen Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ist L = {}.
d) L = {2}
e) Rechnung ergibt $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 2$, Probe führt auf L = {2}

f) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x} \Leftrightarrow 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1}\ \sqrt{x-1} + x - 1 = 5x \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1) = (x + 1)^2$ (1)

$x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 5$ (1)

$D = [1; \infty[$ (1)

Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ergibt $L = \{5\}$. (1)

Aufgabe 7: Wurzelgleichungen

Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{1} &= 5 \\ \sqrt{x} + 1 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 4 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Lösung falsch ist

b) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

Lösung

a) Probe: $\sqrt{16+1} \neq 5$. Der erste Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} + \sqrt{1}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)

b) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man $L = \{24\}$

Aufgabe 8: Wurzelgleichungen

Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{x-4} \\ 1 &= \sqrt{x} - \sqrt{4} \\ 1 &= \sqrt{x} - 2 \\ 3 &= \sqrt{x} \\ 9 &= x \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Lösung falsch ist

b) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

Lösung

a) Probe: $\sqrt{9-4} \neq 1$. Der erste Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{x-4} \neq \sqrt{x} - \sqrt{4}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)

b) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man $L = \{24\}$

Aufgabe 9: Wurzelgleichungen

Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 1 &= \sqrt{x+5} \\ 1 &= \sqrt{x+5} - \sqrt{x} \\ 1 &= \sqrt{x+5-x} \\ 1 &= \sqrt{5} \text{ immer falsch, also } L = \{\} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

a) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

b) Welcher Schritt war falsch?

Lösung

a) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man $L = \{4\}$

b) Der zweite Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{2x-x} \neq \sqrt{2x} - \sqrt{x}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)

Aufgabe 10: Intervallhalbierungsverfahren

Berechne $\sqrt{5}$ mit dem Intervallhalbierungsverfahren auf 2 Nachkommastellen genau. Gib für jeden Schritt die Grenzen an.

Lösung:

Schritt	linke Grenze	rechte Grenze
1	2	3
2	2	2,5
3	2	2,25
4	2,125	2,25
5	2,1875	2,25
6	2,21875	2,25
7	2,234375	2,25
8	2,234375	2,2421875

$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2{,}24$

Aufgabe 11: Intervallhalbierungsverfahren

Berechne $\sqrt{6}$ mit dem Intervallhalbierungsverfahren auf 2 Nachkommastellen genau. Gib für jeden Schritt die Grenzen an.

Lösung:

Schritt	linke Grenze	rechte Grenze
1	2	3
2	2,5	3
3	2,25	2,5
4	2,375	2,5
5	2,4375	2,5
6	2,4375	2,46875
7	2,4375	2,453125
8	2,4453125	2,453125

$\Rightarrow \sqrt{6} \approx 2{,}45$