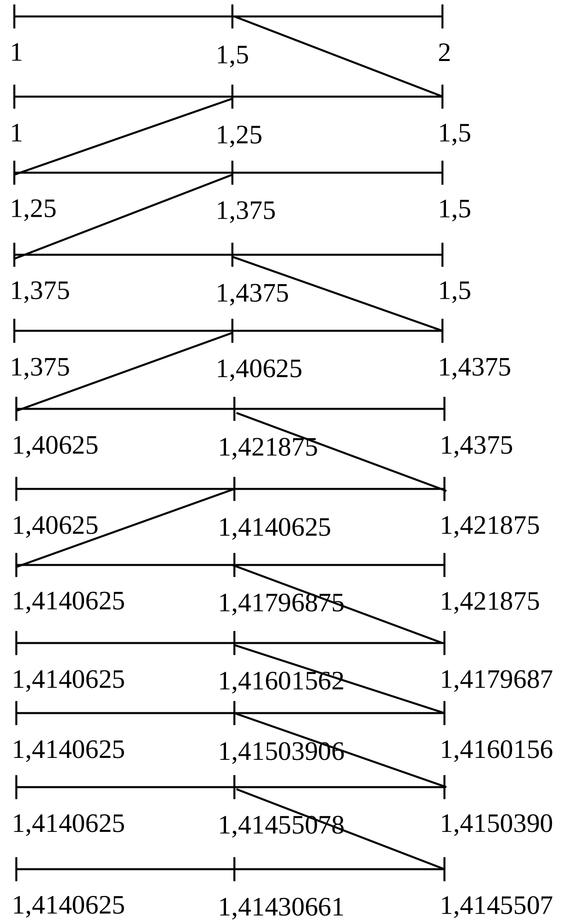
# 1.5. Quadratwurzeln und reelle Zahlen

## 1.5.1. Die Quadratwurzel

**Beispiel**:
Zu berechnen ist die Seitenlänge x in Millimetern eines Quadrates, das eine Fläche von 2 $m^2$ haben soll. Gesucht ist also die Zahl x, deren Quadrat 2 ergibt, d.h. die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Die gesuchte Zahl lässt sich nicht exakt berechnen (!), aber durch systematisches Probieren mit dem **Intervallhalbierungsverfahren** beliebig genau **annähern.**
In diesem Fall soll die Maßangabe auf einen Millimeter genau sein, d.h., der Näherungswert soll um weniger als 1 mm = 0,001 m vom exakten Wert abweichen. **Intervalle** sind Abschnitte auf dem Zahlenstrahl. Man geht von einem **Startintervall** aus, das die gesuchte Zahl auf jeden Fall enthalten muss. Z. B. ist 1 < x, denn $1^2 < 2 = x^2$ und x < 2, denn $x^2 = 2 < 2^2$, d.h., x muss in dem Intervall zwischen 1 und 2 liegen: 1 < x < 2.

Dieses Intervall wird nun fortlaufend halbiert, wobei man mittels Quadrieren der Grenzen immer die Hälfte auswählt, in dem die gesuchte Quadratwurzel liegt. Das Verfahren wird beendet, sobald das Intervall kleiner als die vorgegebene **Fehlertoleranz** von 0,001 m wird. Das **Ergebnis** lautet x = 1,414....

Bei der Durchführung des Verfahrens **von Hand** kann man den gesuchten Bereich anhand der Probe oft genauer einschätzen und wird die Intervalle dritteln, vierteln oder sogar zehnteln. Unser Beispiel lässt sich am vor allem am Schluss auf diese Weise deutlich beschleunigen. Man spricht dann allgemeiner von **Intervallschachtelungsverfahren**.




**Definition**
Die Quadratwurzel einer **positiven** Zahl a ist die **positive** Zahl $\sqrt{a}$, deren Quadrat wieder a ergibt: $\sqrt{a}^{\,2} = a$ mit $\sqrt{a} > 0$ und a > 0. Die Zahl a unter dem Wurzelzeichen heißt auch **Radikand** von radix (lat) = Wurzel.

*Übungen: Aufgaben zu Quadratwurzeln Nr. 1*

## 1.5.2. Reelle Zahlen

$\sqrt{2}$ = 1,414... ist keine rationale Zahl, denn gäbe es einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, dann müsste n ≠ 1 sein, da $\sqrt{2}$ keine ganze Zahl ist. Infolgedessen wäre aber auch $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 2$ nicht mehr kürzbar mit einem Nenner $n^2 \neq 1$, d.h., $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 2$ dürfte ebenfalls keine ganze Zahl sein, was offensichtlich falsch ist.

Zahlen, die sich nicht durch Brüche darstellen lassen, nennt man **irrationale Zahlen**. Die Menge aller Zahlen auf dem Zahlenstrahl setzt sich also aus rationalen und irrationalen Zahlen zusammen, wobei man zeigen kann, dass die irrationalen Zahlen weitaus (!) in der Überzahl sind. Die Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen nennt man auch Menge ℝ der **reellen Zahlen**.

**Zusammenfassung Zahlenmengen**

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$ = Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$ = Menge der **ganzen** Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{z_1}{z_2} : z_1 \in \mathbb{Z} \text{ und } z_2 \in \mathbb{Z}^* \}$ = Menge der **rationalen** Zahlen

$\mathbb{R}$ = Menge aller Zahlen auf dem Zahlenstrahl = Menge der **reellen** Zahlen

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$

offensichtlich ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

**Intervallschreibweise für reelle Zahlen**

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$(**abgeschlossenes** Intervall)


$[a; b[ = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ (**halboffenes** Intervall)


$]a; b[ = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ (**offenes** Intervall)


Das Zeichen $\infty$ für „**unendlich**“ wird benutzt, um Halbgeraden auf der Zahlengeraden zu beschreiben, z.B.

$[a; \infty[ = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$ oder $]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$

*Übungen: Aufgaben zu Quadratwurzeln Nr. 2 und 3*

## 1.5.3. Quadratische Gleichungen

Um eine eindeutige Definition der Quadratwurzel zu erhalten, legt man sich auf positive Werte fest. Die **quadratische Gleichung** $x^2 = 2$ hat aber auch eine **negative Lösung**:, denn sie ist sowohl für $\sqrt{2} = 1{,}414...$ als auch für $-\sqrt{2} = -1{,}414...$ erfüllt. Ihre **Lösungsmenge** ist also $L = \{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ \}$.
Die quadratische Gleichung $x^2 = -2$ hat dagegen keine Lösung, da das Produkt zweier negativer oder zweier positiver Zahlen immer positiv ist.

**Satz**
Die **quadratische Gleichung** $x^2 = a$ besitzt die **Lösungsmenge**
$L = \{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\ \}$, wenn $a > 0$
$L = \{0\}$, wenn $a = 0$
$L = \{\}$, wenn $a < 0$

*Übungen: Aufgaben zu Quadratwurzeln Nr. 4 - 6*

## 1.5.4. Rechenregeln für Wurzelausdrücke

Bei komplizierteren quadratischen Gleichung können zusammengesetzte Wurzelausdrücke auftreten, die sich oft mit Hilfe der folgenden Regeln vereinfachen lassen.

**Satz**
Das Produkt bzw. der Quotient zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel des Produktes bzw. des Quotienten:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{R}^*_+$

**Beweis:** Man vergleicht zunächst die Quadrate der rechten und der linken Seite:

linke Seite: $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$

rechte Seite: $\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = a \cdot b$

Da die Quadrate rechts und links gleich sind, müssen auch die Terme selbst übereinstimmen.

**Beispiel**:
$\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$
$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$

*Übungen: Aufgaben zu Quadratwurzeln Nr. 7*

**Satz**
Die Summe bzw. die Differenz zweier Wurzeln ist **nicht** gleich der Wurzel der Summe bzw. der Differenz:
$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ für für a, b $\in \mathbb{R}^*_+$
**Beweis:** Man vergleicht zunächst die Quadrate der rechten und der linken Seite:
linke Seite: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} + 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = a + 2\sqrt{a}\,\sqrt{b} + b$

rechte Seite: $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

Da die Quadrate rechts und links **ungleich** sind, müssen auch die Terme selbst **verschieden** sein.

**Beispiel**:
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

**Beispiele für die Vereinfachung von Wurzelausdrücken durch**

1. **teilweises Ziehen der Wurzel:**
$\sqrt{50x^2y} = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot x^2 \cdot y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sqrt{y} = 5x\sqrt{2y}$

2. **Ausklammern und teilweises Ziehen der Wurzel:**
$\sqrt{50x^2y^3 + 100x^3y^2} = \sqrt{25x^2y^2(2y+4x)} = \sqrt{25x^2y^2} \cdot \sqrt{2y+4x} = 5xy \cdot \sqrt{2y+4x}$

3. **Rationalmachen des Nenners:**
$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})} = \frac{6\sqrt{6}+18\sqrt{10}}{3-9\cdot 5} = -\frac{6\sqrt{6}+18\sqrt{10}}{42} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{10}}{7}$$

*Übungen: Aufgaben zu Quadratwurzeln Nr. 8 - 10*

## 1.5.5. Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen löst man durch **Isolieren** und **Quadrieren** der Wurzel. Da der Radikand der Wurzel nicht negativ sein darf, muss man zum Schluss wie bei den Bruchgleichungen **Definitions- und Lösungsmenge** miteinander vergleichen.

**Beispiel:**
Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung $3 - \sqrt{x-3} = 2$
**Lösung:**
Da der Radikand nicht negativ sein darf, ist die **Definitionsmenge** D = $\{x \in \mathbb{Q}: x \geq 3\}$

$$\begin{aligned}
3 - \sqrt{x-3} &= 2 && |\; -1 \\
-\sqrt{x-3} &= -1 && |\; \cdot(-1) \\
\sqrt{x-3} &= 1 && |\; ^2 \\
x - 3 &= \pm 1 && |\; +3 \\
x_{1/2} &= \pm 1 + 3 && | \\
x_1 &= 4 \in D \\
x_2 &= 2 \notin D
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Lösungsmenge** L = $\{4\}$

*Übungen: Aufgaben zu Quadratwurzeln Nr. 11*