1.6. Potenzen

1.6.1. Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition: Das **Produkt** aus dem natürlichen **Faktor** n und dem reellen **Faktor** a ist definiert als die **Summe**, die aus n Summanden a zusammengesetzt ist.

$$\underbrace{n\cdot a}_{\substack{\text{Produkt aus}\\ \text{2 Faktoren}}} \quad := \quad \underbrace{a + \ldots + a}_{\substack{\text{Summe aus}\\ \text{n Summanden}}}, \text{ wobei } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Merke: Produkte sind eine Kurzschreibweise für Summen mit gleichen Summanden.

Definition: Die **Potenz** aus der reellen **Grundzahl** (**Basis**) a und der natürlichen **Hochzahl** (**Exponent**) n ist definiert als das **Produkt**, das aus n Faktoren a zusammengesetzt ist.

$$\underbrace{a^n}_{\substack{\text{Potenz aus}\\ \text{Basis und}\\ \text{Exponent}}} \quad := \quad \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\substack{\text{Produkt aus}\\ \text{n Faktoren}}}, \text{ wobei } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Merke: Potenzen sind eine Kurzschreibweise für Produkte mit gleichen Faktoren

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 1 und 2

1.6.2. Potenzen mit negativen Exponenten

Potenzen mit negativen Exponenten werden definiert, indem man die Reihe der Potenzen mit natürlichen Exponenten zu einer gegebenen Basis a in Richtung negativer Exponenten fortsetzt:

Beispiel mit der Basis 2:

Veränderung des Exponenten: −1 −1 −1 −1

2^{-n}	...	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	...	2^n
$\frac{1}{2\cdot\ldots\cdot 2}$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...	$2\cdot\ldots\cdot 2$

Veränderung der Potenz: :2 :2 :2 :2

Verallgemeinerug auf beliebige reelle Basen a:

Veränderung des Exponenten: −1 −1 −1 −1

a^{-n}	...	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	...	a^n
$\frac{1}{a\cdot\ldots\cdot a}$	...	$\frac{1}{a\cdot a}$	$\frac{1}{a}$	1	a	$a\cdot a$	...	$a\cdot\ldots\cdot a$

Veränderung der Potenz: :a :a :a :a

Definition:

$a^{-z} := \dfrac{1}{a^z}$ für $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

$a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$

Merke:
Ersetzt man den Exponenten durch seine Gegenzahl, so erhält man den Kehrwert der Potenz.
Bemerkung:
Beachte, dass a^0 durch die erste Definition nicht eindeutig bestimmt werden kann: $a^0 = \dfrac{1}{a^0} \Leftrightarrow (a^0)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $a^0 \in \{-1, 1)$. Das 1. Potenzgesetz $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ mit $m = 0$ bleibt aber nur bei der Wahl $a^0 := 1$ gültig!

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 3 und 4

Definition und Satz:
Jede reelle Zahl lässt sich durch ein eindeutig bestimmtes Produkt aus einer Dezimalzahl mit einer von Null verschiedenen Ziffer vor dem Komma und einer Zehnerpotenz darstellen. Diese Darstellung heißt **Normdarstellung.**

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 5

1.6.3. Potenzgesetze für ganze Exponenten

Satz 1: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:
Merke: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.
Beweis:
Für $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt $a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{m Faktoren}} = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{\text{n + m Faktoren}} = a^{n+m}$.
Die übrigen Fälle $n < 0$ und $m \geq 0$, $n \geq 0$ und $m < 0$ sowie $n < 0$ und $m < 0$ werden analog behandelt.

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 6 und 7

Satz 2: Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$:
Merke: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert.
Beweis:
Für $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot ... \cdot b)}_{\text{n Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{\text{n Produkte}} = (a \cdot b)^n$.
Die übrigen Fälle $n < 0$ und $m \geq 0$, $n \geq 0$ und $m < 0$ sowie $n < 0$ und $m < 0$ werden analog behandelt.

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 8

Satz 3: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$:
Merke: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.
Beweis:
Für $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt $(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} \cdot ... \cdot \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}}}_{\text{m Produkte}} = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{\text{n} \cdot \text{m Faktoren}} = a^{n \cdot m}$
Die übrigen Fälle $n < 0$ und $m \geq 0$, $n \geq 0$ und $m < 0$ sowie $n < 0$ und $m < 0$ werden analog behandelt.

Übungen: Aufgaben zur Potenzrechnung Aufgabe 9 a) - j)

Vereinfachen von Potenzausdrücken
1. nach gleichen Basen ordnen
2. Brüche durch negative Exponenten ausdrücken
3. Potenzgesetze anwenden

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 9 k) - o)

1.6.4. Die n-te Wurzel

Definition:
Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist die **n-te Wurzel** aus a definiert als die **positive** Zahl $\sqrt[n]{a}$, deren n-te Potenz wieder a ergibt: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ mit $a \geq 0$ und $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 10

1.6.5. Potenzen mit rationalen Exponenten

Potenzen mit rationalen Exponenten werden definiert, indem man die Reihe der Potenzen mit natürlichen Exponenten zu einer gegebenen Basis a in Richtung negativer Exponenten fortsetzt:

Beispiel mit der Basis 2:

Veränderung des Exponenten: :2 :2 :2 :2

$2^{1/2n}$	...	$2^{1/4}$	$2^{1/2}$	2^1	2^2	2^4	...	2^{2n}
$\sqrt[2n]{2}$	...	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[2]{2}$	2	4	16	...	$2\cdot\ldots\cdot2$

Veränderung der Potenz: $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$

Definition 1:

Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ sei $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$
Merke:
Man darf nicht durch 0 teilen, daher $n \neq 0$; man darf nicht Wurzeln einer negativen Zahl ziehen, daher $a \geq 0$.
Definition 2:
Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ sei $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.
Begründung: Wenn das 3. Potenzgesetz für rationale Exponenten weiterhin gelten soll, erhält man
$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{1}{n}\cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 11 und 12

Satz:
Die Potenzgesetze Satz 1 - 3 gelten auch für rationale Exponenten.
Beweis:
Satz 1: Für $n, m, p, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ erhält man unter Anwendung des Satzes über ganzzahlige Exponenten und der Definition $a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n\cdot q}{m\cdot q}} \cdot a^{\frac{p\cdot m}{q\cdot m}} = \left(\sqrt[m\cdot q]{a}\right)^{n\cdot q} \cdot \left(\sqrt[m\cdot q]{a}\right)^{m\cdot p} = \left(\sqrt[m\cdot q]{a}\right)^{n\cdot q + m\cdot p} = a^{\frac{n\cdot q + p\cdot m}{q\cdot m}} = a^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}}$
Die Beweise für Satz 2 und 3 verlaufen analog.

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 13

1.6.6. Potenzen mit irrationale Exponenten

Potenzen mit irrationalen Exponenten wie z.B. $3^{\sqrt{2}}$ werden definiert als die Zahl, die man erhält, wenn man sich dem irrationalen Exponenten mit rationalen Näherungswerten immer mehr nähert:

n	3^n
1,4	4,656
1,41	4,707
1,414	4,728
1,4142	4,729
1,41421	4,729
↓	↓
$\sqrt{2}$	$3^{\sqrt{2}}$

Definition

Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenz a^x definiert als die Zahl, die man erhält, wenn man den Exponenten x mit rationalen Exponenten n immer näher kommt: Für $n \to x$ gilt auch $a^n \to a^x$.

Merke:
Für Potenzen mit irrationalen Exponenten gilt da gleiche wie für die irrationalen Exponenten selber: Sie lassen sich zwar niemals exakt, aber dafür mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

Satz:
Die Potenzgesetze gelten für alle Näherungswerte mit rationalen Exponenten und daher auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten

Satz und Definition:

Für alle $0 < a < 1$ bzw. $1 > a$ und $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{Q}$ mit $n < x < m$ auch $a^m < y < a^n$ bzw. $a^n < y < a^m$ gilt. Diese Zahl wird als Potenz a^x bezeichnet: $a^x := y$.

Beweis:
Man benötigt auf jeden Fall das Vollständigkeits- oder Intervallschachtelungsaxiom und darüber hinaus die Taylorentwicklung mit Restglied 1. Ordnung für die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$:
Für $n < m$ ist für $0 < a < 1$ auch $a^m < a^n$ und für $1 < a$ gilt $a^n < a^m$, da $f(n) = a^n$ für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $1 < a$ streng monoton steigend ist. Ist $m - n < \delta$ so ist $|a^n - a^m| = a^n \cdot |a^{m-n} - 1| < a^n \cdot 2 \cdot (m-n) \cdot \ln(a) < a^n \cdot 2 \cdot \delta \cdot \ln(a)$, d.h. $|a^n - a^m|$ wird beliebig klein, wenn $|m - n|$ genügend klein gewählt wurde. Insgesamt ist damit gezeigt: Bilden die (m, n) eine Intervallschachtelung mit Zentrum x, so bilden die (a^n, a^m) ebenfalls wieder eine Intervallschachtelung. Wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen hat die Intervallschachtelung (a^n, a^m) genau ein Zentrum y.
Oder kürzer: Die Menge der $n < x < m$ bildet eine Folge, die gegen x konvergiert und insbesondere eine Cauchy-Folge darstellt. Wegen der Stetigkeit von $f(n) = a^n$ für $n \in \mathbb{Q}$ bilden die a^n und a^m ebenfalls eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen gegen genau ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert.
Definition:
Die im obigen Satz erwähnte Zahl wird als Potenz a^x bezeichnet

Übung: Erkläre die Definition und näherungsweise Berechnung von Potenzen mit reellen Exponenten anhand eines selbst gewählten Beispiels.

1.6.7. Potenz- und Wurzelgleichungen

Einführung: Aufgaben zu Potenzen Nr. 14 a) -h)

Satz

Für die Lösung der Potenzgleichung $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt L =

	n gerade	n ungerade
a > 0	$\{+\sqrt[n]{a}\,;\ -\sqrt[n]{a}\}$	$\{\sqrt[n]{a}\}$
a = 0	$\{0\}$	$\{0\}$
a < 0	$\{\}$	$\{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\}$

Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 14 i) - l)