Maßtheorie

Arne Vorwerg

August 2022

Vorwort

Messbarer Mengen und **Maße** sowie ihre Beziehung zu offenen Mengen und Abstandsmaßen der **Topologie** sind einerseits von eigenständigem Interesse, andererseits durch die Interpretation als Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten auch Grundlage der **Stochastik**. In der **Analysis** führt der Maßbegriff auf die verallgemeinerte **Integration** und **Differentiation** von Funktionen. Die alternative Charakterisierung von Funktionen durch ihren Inhalt bzw. durch ihr Änderungsverhalten stehen im Mittelpunkt der **Funktionentheorie** und der **Funktionalanalysis**.

Die Darstellung basiert im Wesentlichen auf den klassischen Werken von **Bauer** [1], **Rudin** [9] und **Hewitt/Stromberg** [5]. Die mengentheoretischen bzw. topologischen Grundlagen werden in [13] bzw. [14] behandelt und sind daher nicht mehr in diesem Text enthalten. Neben der **Mengenlehre** und **Topologie** werden auch solide Grundkenntnisse in der **reellen Analysis** vorausgesetzt, die man z.B. in [8] nachlesen kann. Aus Gründen der Übersicht sind einfache Aussagen und Sätze ohne Beweis in den Text integriert. Die ausführliche Begründung und gegebenenfalls auch Visualisierung dieser Aussagen ist unerlässlich für das Verständnis des Textes und ersetzt explizite Übungsaufgaben zu exotischen Räumen und Maßen.

Im ersten Abschnitt werden Systeme messbarer Mengen, Maße und messbare Funktionen in teilweiser Analogie zur Entwicklung der offenen Mengen, Metriken und stetigen Funktionen in der **Topologie** behandelt. Nach einer Einführung in die **Integration** stellt sich heraus, dass der Integralbegriff geeignet ist für die Charakterisierung und Erweiterung des Maßbegriffes auf **Produkträume**. Die Bedeutung von Maßen auf abzählbaren Produkten von Maßräumen in der **Wahrscheinlichkeitstheorie** wird anhand des **starken Gestzes der großen Zahlen** sowie des **zentralen Grenzwertsatzes** verdeutlicht. Der **Rieszschen Darstellungssatz** auf **lokalkompakten Räumen** liefert schließlich die Gleichwertigkeit des Maßbegriffes mit dem des **positiven bzw. beschränkten Funktionals** und damit die Charakerisierung von **Dualräumen** durch Maße in der **Funktionalanalysis**. Die Grundlagen der **Analysis** auf endlichdimensionalen **komplexen Vektorräumen** werden in den abschließenden Abschnitten entwickelt.

Höchenschwand, im August 2022 Arne Vorwerg

Inhaltsverzeichnis

1 Messbare Mengen

1.1 Definitionen: Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge X heißt **Ring**, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A, B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Gilt außerdem

4. $X \in \mathcal{A}$,

so spricht man von einer **Algebra**. Wenn zusätzlich

3.a) $(A_n)_{n\in N} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

erfüllt ist, handelt es sich um eine **σ-Algebra.** Das Paar $(X;\mathcal{A})$ heißt dann **Messraum.**

Wegen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n)$ folgt aus 2. und 3. bzw. 3.a) auch die Abgeschlossenheit einer Algebra bzw. σ-Algebra für **endliche bzw. abzählbare Duchschnitte**.

1.2 Borelsche σ-Algebren: Für eine beliebige Mengenfamilie $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ist der Durchschnitt aller σ-Algebren, welche $\mathcal{M}$ enthalten, wieder eine σ-Algebra und wird die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{M})$ genannt. Auf einem **topologischen Raum** $(X;\mathcal{O})$ wird die **Borelsche σ-Algebra** $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ von der Topologie $\mathcal{O}$ erzeugt. Nach 1.1 enthält sie nicht nur die **offenen** Mengen und alle ihre **abzählbaren Durchschnitte** (**G_δ-Mengen**), sondern auch alle **abgeschlossenen** Mengen sowie ihre **abzählbaren Vereinigungen** (**F_σ-Mengen**). In einem **Hausdorff-Raum** sind alle **kompakten** Mengen abgeschlossen und damit insbesondere messbar bezüglich $\mathcal{B}(X)$. Ist X **lokalkompakt** und **abzählbar im Unendlichen**, so wird $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{K})$ sogar von den kompakten Mengen $\mathcal{K}$ **erzeugt**, denn nach z.B. [7, Satz 9.4 und 10.5] ist jede abgeschlossene Menge eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen. In einem **diskreten** Raum X mit $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ hingegen besteht $\mathcal{K}$ aus den **endlichen Teilmengen** und $\sigma(\mathcal{K})$ ist die σ-Algebra aller Mengen $A \subset X$, für die A oder $X \setminus A$ **abzählbar** ist. Mit z.B. dem **Lemma von Zorn** ([6, Satz 14.2.4]) überlegt man sich leicht, dass $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X)$ genau dann gilt, wenn X selbst abzählbar ist.

1.3 Spur einer σ-Algebra: Die **Spur-σ-Algebra** (vgl. 8.3) $\mathcal{A} \cap B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ auf der Teilmenge $B \subset X$ eines Messraumes $(X;\mathcal{A})$ besteht einfach aus den **Schnitten der messbaren Mengen** A in X mit B. Wegen $(O_1 \setminus O_2) \cap B = (O_1 \cap B) \setminus O_2 = (O_1 \cap B) \setminus (O_2 \cap B)$ und $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (O_n \cap B)$ ist die Spur $\sigma(\mathcal{O}) \cap B$ der **Borelschen σ-Algebra** $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ auf einem **topologischen Raum** $(X;\mathcal{O})$ identisch mit der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O} \cap B)$ der Spur $\mathcal{O}\cap B$ der **Topologie** $\mathcal{O}$ auf B.

1.4 Intervalle und Figuren: Die **endlichen** Vereinigungen **paarweise disjunkter, nach rechts halboffener** Intervalle $\mathcal{I} = \{[a;b[:\ a \le b \in \mathbb{R}\}$ bilden den **Ring** $\mathcal{F} = \left\{ \mathop{\mathring{\bigcup}}_{0\le k\le m} I_k : I_k \in \mathcal{I}, m \in \mathbb{N} \right\}$ der **eindimensionalen Figuren**, denn $\emptyset = [a;a[\in \mathcal{I}$ und für $I, J \in \mathcal{I}$ sind auch $I \cap J \in \mathcal{I}$, $I \setminus J \in \mathcal{I}$ sowie $I \cup J \in \mathcal{I}$, falls $I \cap J \ne \emptyset$ und $I \cup J \in \mathcal{F}$, falls $I \cap J = \emptyset$. Damit folgt für $F = \mathop{\mathring{\bigcup}}_{0\le k\le m} I_k \in \mathcal{F}$ und $G = \mathop{\mathring{\bigcup}}_{0\le l\le n} J_l \in \mathcal{F}$ auch $F \cap G = \mathop{\mathring{\bigcup}}_{0\le k\le n} \mathop{\mathring{\bigcup}}_{0\le l\le n} I_k \cap J_l \in \mathcal{F}$, $F \setminus G = F \setminus (F \cap G) \in \mathcal{F}$ und $F \cup G \in \mathcal{F}$. Die **nach rechts halboffene Intervalle** $[a;b[$ sind als **G_δ-Mengen** Borel-messbar und **erzeugen** wegen $]a;b[= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[a + 2^{-k}; b\right[$ und dem 1. Abzählbarkeitsaxiom (vgl. [7, Definition 2.6]) ebenso wie der Ring der Figuren wieder die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$: $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{I})$. Das gleiche gilt wegen $[a;\infty[= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [a; b+k[$ bzw. $[a;b[= [b;\infty[\setminus [a;\infty[$ für die Intervalle $[a;\infty[$ sowie mit analogen Argumenten für $]a;\infty[$, $]-\infty;a[$, $]-\infty;a]$ und $]a;b]$ jeweils für $a, b \in \mathbb{R}$ mit analogen Herleitungen.

1.5 Borelsche σ-Algebren auf der Einpunktkompaktifizierung: Da man sich nicht auf messbare Mengen mit endlichem Maß beschränken möchte, muss auch der „Wert“ ∞ für z.B. das Maß der Menge $X = \mathbb{C}$ zugelassen werden. Daher wird in dieser Darstellung die **Einpunktkompaktifizierung**

$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (vgl. [14, Satz 10.4]) als Wertebereich verwendet. Diese einfachste Kompaktifizierung erfüllt sowohl algebraisch als auch topologisch nicht alle Wünsche: $a \cdot \infty := \infty$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist unproblematisch, $0 \cdot \infty := 0$ eine Spezialdefinition der Maßtheorie, welche die Toleranz des Integrals gegenüber einzelnen Polstellen sicherstellt (vgl. 5.7), allerdings zu den **Unstetigkeitsstellen** $(0; \infty)$ bzw. $(\infty; 0)$ bei der Multiplikation führt (siehe 4.5). Die Differenz $\infty - \infty$ ist nicht definiert, da ∞ keine Gegenzahl besitzt. Außerdem kann nicht jede stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to Y$ in einen kompakten Raum Y eindeutig stetig auf $\overline{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden. Für die Zwecke der Maßtheorie ist die Einpunktkompaktifizierung aber ausreichend. Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} :=] - \infty; \infty]$ werden auch **numerische Funktionen** genannt. Ihre **Topologie** wird durch die offenen Mengen auf $\mathbb{C}$ und zusätzlich die Komplemente $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ kompakter Mengen K erzeugt. Nach 1.3 wird die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{C}$ sowohl durch die offenen als auch durch die kompakten Mengen erzeugt, so dass einerseits $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$ und andererseits $A \in \overline{\mathcal{B}} \Rightarrow A \setminus \{\infty\} \in \mathcal{B}$. Da $\{\infty\} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0)$ messbar ist, gilt also einfach $\overline{\mathcal{B}} = \{A; A \cup \{\infty\} : A \in \mathcal{B}\}$. Nach 1.3 und 1.4 wird die Borelsche σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ auf den kompaktifizierten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ also alternativ von Intervallen der Form $[a; \infty],]a; \infty],] - \infty; a[$ und $] - \infty; a]$ jeweils für $a \in \mathbb{R}$ erzeugt.

1.6 Dynkin-Systeme: Eine Familie $\mathcal{D}$ von Teilmengen einer Menge X heißt **Dynkin-System**, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$.
2. $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$
3. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \wedge (n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset) \Leftrightarrow \mathring{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$

1.7 Eigenschaften der Dynkin-Systeme:

1. Für $B \subset A \in \mathcal{D}$ ist $A \setminus B = X \setminus \left((X \setminus A) \mathring{\cup} B\right) \in \mathcal{D}$.
2. Ein **durchschnittstabiles** Dynkin-System ist eine **σ-Algebra**, denn mit 1.4.2 und 1.5.1 ist mit $A, B \in \mathcal{D}$ ist $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$ und für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ sind auch alle $A'_n := A_n \setminus \bigcup_{1 \leq k < n} A_k = \bigcap_{1 \leq k < n} (A_n \setminus A_k) \in \mathcal{D}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathring{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A'_n \in \mathcal{D}$.
3. Für eine **durchschnittstabile** Familie $\mathcal{E} \subset P(X)$ ist auch das von ihr erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ durchschnittstabil und damit eine σ-Algebra, denn für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ ist die Familie $\mathcal{D}_D := \{A \subset X : A \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}$ wegen $(X \setminus A) \cap D = D \setminus (A \cap D)$ selbst ein Dynkin-System und enthält $\mathcal{E}$ und damit auch $\delta(\mathcal{E})$, woraus die Behauptung folgt.

2 Inhalte und Prämaße

2.1 Definitionen: Ein **Inhalt** $\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty]$ ist eine **additive** Mengenfunktion auf einem **Ring** $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Grundmenge X: $\mu\,(A \mathring{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)\, \forall A, B \in \mathcal{A} :\ A \cap B = \emptyset$. Ist μsogar **σ-additiv** mit $\mu\left(\mathring{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\,(A_n)\, \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} :\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, so spricht man von einem **Prämaß**.

2.2 Eigenschaften:

1. Mit $\mu\,(A) < \infty$ und $B = \emptyset$ erhält man für jeden **Inhalt** $\mu\,(\emptyset) = 0$.
2. Mit $\mu\,(A_k) < \infty$ für $0 \leq k \leq n$ und $A_k = \emptyset$ für $k > n$ ergibt sich aus 1. die **endliche Additivität**: Jedes **Prämaß** ist insbesondere ein **Inhalt**.
3. Für $A \subset B$ mit $\mu\,(A)\,, \mu\,(B) < \infty$ folgt wegen $A \setminus B \in \mathcal{A}$ und $B = A \cup B \setminus A$ aus der endlichen Additivität für jeden **Inhalt** auch $\mu\,(B \setminus A) = \mu\,(B) - \mu\,(A)$ und insbesodere die **Monotonie:** $\mu\,(A) < \mu\,(B)$.
4. Aus einer **aufsteigenden** Folge messbarer Mengen $A_0 \subset A_1 \subset ...$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ und $\mu\,(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \infty$ erhält man mit $A'_n := A_n \setminus \bigcup_{1 \leq k < n} A_k$ eine paarweise disjunkte Mengenfamilie $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu\,(A_n) = \mu\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A'_k\right) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mu\,(A'_k)$ und damit die **Stetigkeit von unten für Prämaße:** $\lim_{n \in \mathbb{N}} \mu\,(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\,(A'_n) = \mu\,(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

5. Für **absteigende** Folgen messbarer Mengen $A_0 \supset A_1 \supset ...$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ergibt sich durch Übergang zu den **Komplementen** $A'_n := A_0 \setminus A_n \in \mathcal{A}$ eine aufsteigende Folge $\emptyset = A'_0 \subset A'_1 \subset ...$ und durch Anwendung von 4. die **Stetigkeit von oben für Prämaße:** $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_0 \setminus A'_n) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A_0) - \mu(A'_n)) = \mu(A_0) - \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A'_n) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \mu\left(A_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_0 \setminus A'_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
6. Ein **Inhalt** ist genau dann ein **Prämaß**, wenn er **stetig von oben** oder **stetig von unten** ist.

2.3. Beispiele:

1. Die **Diracsche Einheitmasse** $\epsilon_x(A) := \begin{cases} 1, \, x \in A \\ 0, \, x \notin A \end{cases}$ für $A \subset X$ und $x \in X$ ist ein **Prämaß** auf jedem **Ring** einer Grundmenge X.
2. Das auf $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ eines diskreten Raumes gemäß 1.2 definierte **Maß** $\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$
3. Der **Lebesgue-Borelsche Inhalt** $\lambda([a;b[) := b - a \forall a < b \in \mathbb{R}$ auf dem **Ring der Figuren** aus 1.4 ist nach 2.2.6 ein **Prämaß**, denn für eine **absteigende Figurenfolge** $F_0 \supset F_1 \supset ...$ mit $F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathring{\bigcup}_{0\leq k\leq m} [a_k; b_k[\in \mathcal{F}$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0 \forall I_{jn} \in F_n \exists k \leq m$ mit $[a_k; b_k[\subset I_{jn} \subset [a_k - \frac{\epsilon}{2m}; b_k + \frac{\epsilon}{2m}[$ und damit $\lambda(F_n) = \sum_{0\leq j\leq m} \lambda(I_{jn}) < \mu(F) + \epsilon$.

3 Vom Prämaß zum Maß

3.1 Definition: Ist ein Prämaß μ auf einer **σ-Algebra** $\mathcal{A}$ erklärt, so spricht man von einem **Maß** und $(X; \mathcal{A}; \mu)$ ist ein **Maßraum**. **Wahrscheinlichkeitsmaße** haben der Wertebereich $[0;1]$ und $(X; \mathcal{A}; \mu)$ heißt dann **Wahrscheinlichkeitsraum.**

3.2 Äußere Maße: Eine Mengenfunktion $\tilde{\mu} : P(X) \to [0;\infty]$ heißt **äußeres Maß**, wenn gilt:

1. $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$
3. $\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n)$

Eine Menge $A \subset X$ heißt **$\tilde{\mu}$-messbar**, wenn für jedes $Q \subset X$ gilt

4. $\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q \cap A) + \tilde{\mu}(Q \setminus A)$.

3.3 Satz von Carathéodory: Für ein äußeres Maß $\tilde{\mu}$ auf einer Menge X ist das System $\mathcal{A}$ aller $\tilde{\mu}$-messbaren Mengen $A \subset X$ eine σ-Algebra und die Restriktion $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß.

Beweis: Offensichtlich sind $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ und wegen $Q \setminus A = Q \cap (X \setminus A)$ ist mit $A \in \mathcal{A}$ auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Für $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$, denn durch mehrfache Anwendung des Messbarkeitskriteriums erhält man zunächst (I): $\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q \cap A) + \tilde{\mu}(Q \setminus A) = \tilde{\mu}(Q \cap A \cap B) + \tilde{\mu}(Q \cap A \setminus B) + \tilde{\mu}(Q \setminus A \cap B) + \tilde{\mu}(Q \setminus A \setminus B)$ sowie durch Ersetzen von Q durch $Q \cap (A \cup B)$ in (I) die Gleichung (II): $\tilde{\mu}(Q \cap (A \cup B)) = \tilde{\mu}(Q \cap A \cap B) + \tilde{\mu}(Q \cap A \setminus B) + \tilde{\mu}(Q \setminus A \cap B)$ und schließlich durch Einsetzen von (II) in (I) das Messbarkeitskriterium für die Vereinigung: $\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q \cap (A \cup B)) + \tilde{\mu}(Q \setminus (A \cup B))$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{A}$ eine **Algebra** ist.

Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ **paarweise disjunkter messbarer Mengen** mit $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ergibt Gleichung (II) $\tilde{\mu}(Q \cap (A_0 \cup A_1)) = \tilde{\mu}(Q \cap A_0) + \tilde{\mu}(Q \cap A_1)$ bzw. durch vollständige Induktion $\tilde{\mu}\left(Q \cap \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{\mu}(Q \cap A_k)$. Wegen $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ und 3.2.2 folgt daraus $\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}\left(Q \cap \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) + \tilde{\mu}\left(Q \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \geq \sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{\mu}(Q \cap A_k) + \tilde{\mu}(Q \setminus A)$. Da diese Abschätzung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist sie auch für $n \to \infty$ erfüllt und mit 3.2.3 erhält man das Messbarkeitskriterium für A. Gemäß 1.6.3 ist $\mathcal{A}$ also ein **durchschnittsstabiles Dynkin-System** und nach 1.7.2 eine **σ-Algebra**. Setzt man im Messbarkeitskriterium $Q = A$, so erhält man die σ-Additivität von $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}$, d.h., $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß.

3.4 Eindeutigkeitssatz: Zwei Maße μ_1 und μ_2 auf einer σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ sind gleich, wenn sie auf dem **durchschnittsstabilen** Erzeuger $\mathcal{E}$ übereinstimmen und dort **σ-endlich** sind: $\exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ und $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Die Familie $\mathcal{D}_E := \{D \in \sigma(\mathcal{E}) : \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}$ ist für jedes $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ ein Dynkin-System, denn $\emptyset \in \mathcal{D}_E$ und mit $D \in \mathcal{D}_E$ ist wegen $\mu_1(E \cap X \setminus D) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) = \mu_2(E \cap X \setminus D)$ auch $X \setminus D \in \mathcal{D}_E$. Aus der σ-Additivität von μ_1 und μ_2 folgt analog Eigenschaft 1.6.3. Da $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil ist, folgt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$ und da $\mathcal{D}_E$ Dynkin-System ist, gilt nach 1.7.3 weiter $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E \subset \sigma(\mathcal{E})$, d.h. $\mathcal{D}_E = \sigma(\mathcal{E})$ bzw. $\mu_1(E \cap A) = \mu_2(E \cap A)$ für alle $E \in \mathcal{E}$ und $A \in \sigma(\mathcal{E})$.

Wie in 2.2.4 erhält man mit $E'_n := E_n \setminus \bigcup_{1\le k<n} E_k \in \sigma(\mathcal{E})$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} E'_n = X$ und für beliebige $A \in \sigma(\mathcal{E})$ ist auch $E'_n \cap A \in \sigma(\mathcal{E})$, also $\mu_1(E_n \cap E'_n \cap A) = \mu_2(E_n \cap E'_n \cap A)$ und aus der σ-Additivität von μ_1 und μ_2 folgt $\mu_1(A) = \mu_2(A)$.

3.5 Fortsetzungssatz: Jedes σ-endliche **Prämaß** μ auf einem **Ring** $\mathcal{R}$ lässt sich **eindeutig** zu einem **Maß** μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen.

Beweis: Für jede Menge $Q \subset X$ sei $\mathcal{U}(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $Q \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann ist $\tilde{\mu}(Q) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q)\right\}$, falls $\mathcal{U}(Q) \neq \emptyset$ und $\tilde{\mu}(Q) := \infty$ sonst ein **äußeres Maß**, denn offensichtlich ist $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ und für $P \subset Q$ folgt $\mathcal{U}(P) \supset \mathcal{U}(Q)$ und damit auch $\tilde{\mu}(P) \le \tilde{\mu}(Q)$. Insbesondere ist damit $\tilde{\mu}(Q) \ge 0\ \forall Q \subset X$. Für eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P(X)$ gibt es o.B.d.A. für jedes $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(Q_n) \neq \emptyset$ mit $\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{nm}) < \tilde{\mu}(Q_n) + \epsilon \cdot 2^{-n-1}$ und wegen $(A_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n)$ folgt $\tilde{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n) \le \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_{nm}) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(Q_m) + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig, ist 3.2.3 erfüllt.

Der Ring $\mathcal{R}$ ist **$\tilde{\mu}$-messbar**, denn für jedes $A \in \mathcal{R}$ und $Q \subset X$ sind mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(Q)$ auch $(A_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(Q \cap A)$ bzw. $(A_n \setminus A)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(Q \setminus A)$ und wegen $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$ folgt $\tilde{\mu}(Q) \ge \tilde{\mu}(Q \cap A) + \tilde{\mu}(Q \setminus A)$ sowie wegen 3.2.3 auch die Gleichheit. Die Behauptung folgt nun durch Anwendung von 3.3 und 3.4.

3.6 Approximationseigenschaft: Jede Menge $Q \in \sigma(\mathcal{R})$ einer durch den Ring $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ mit einem **endlichen** Maß μ lässt sich durch eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ bezüglich μ approximieren: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(Q \Delta C_n) = 0$ und insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(Q)$.

Beweis: Für $\epsilon > 0$ und da μ endlich existiert nach dem Beweis von 3.5 eine Folge o.B.d.A. (vgl. 2.2.4) paarweise disjunkter Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $Q \subset \mathring{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $\mu\left(\mathring{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) - \mu(C) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) - \mu(Q) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann bilden die Vereinigungen $C_n := \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ die gewünschte Folge, denn wieder nach 2.2.4 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu(C_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$ und damit $\mu(Q \Delta C_{n_0}) = \mu(Q \setminus C_{n_0}) + \mu(C_{n_0} \setminus Q) \le \mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus C_{n_0}\right) + \mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus Q\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Die zweite Formulierung ergibt sich wegen $\mu(C_n) = \mu(Q) + \mu(C_n \setminus C)$ und $\mu(C_n \setminus C) \le \mu(Q \Delta C_n)$.

3.7 Lebesgue-Borelsches Maß: Die Fortsetzung des **Lebesgue-Prämaßes** λ aus 2.3.2 gemäß 3.5 auf der gemäß 1.5 durch die nach **rechts halboffenen Intervalle** $\mathcal{I}$ bzw. den **Ring der Figuren** $\mathcal{F}$ erzeugten Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{F})$ wird **Lebesgue-Borelsches Maß** genannt und wieder mit λ bezeichnet. Beachte, dass der Maßraum $(\mathbb{R}; \mathcal{B}; \lambda)$ an dieser Stelle auf die reellen Zahlen und die Werte auf den Bereich $[0; \infty]$ beschränkt sind. Der Maßraum wird in Abschnitt 6 auf endliche Produkte von Maßräumen und insbesondere $\mathbb{C}$ erweitert. Auch der Wertebereich lässt sich sinnvoll auf $\mathbb{C}$ ausdehnen; dies wird in Abschnitt 8 durchgeführt. Das Lebesgue-Borelsche Maß ist **σ-endlich** mit $\lambda([a; b[) = \lambda([a; b]) = \lambda(]a; b]) = \lambda(]a; b[) = b - a$ für $a \le b \in \mathbb{R}$ wegen 2.2.4 bzw. 2.2.5 und durch diese Vorschrift auf dem **durchschnittsstabilen** System $\mathcal{I}$ nach 3.4 schon **eindeutig bestimmt.** Insbesondere sind alle einpunktigen Mengen sowie ihre abzählbaren Vereinigungen **λ-Nullmengen**, u.A. die **rationalen Zahlen**: $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Auch das **Cantorsche Diskontinuum** $T := f\left[\{0; 2\}^{\mathbb{N}}\right]$ mit $f(x) = \sum_{n\ge1} \frac{x_n}{3^n}$ für jede Folge $x = (x_n)_{n\ge1}$ mit $x_n \in \{0; 2\}$ (vgl. [7, Satz 2.10] ist eine λ-Nullmenge, denn $T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ mit $T_0 = [0; 1]$ und T_{n+1} ist eine disjunkte Verenigung von 2^{n+1} abgeschlossenen Intervallen mit der Länge $\frac{1}{3^{n+1}}$, die durch Wegnahme des jeweils mittlere Drittels aus den 2^n abgeschlossenen Intervallen T_n mit der Länge $\frac{1}{3^n}$ entsteht, so dass $\lambda(T_n) = \frac{2^n}{3^n}$ und $\lambda(T) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(T_n) = 0$ wegen 2.2.5. Die in $\mathbb{R}$ dichte G_δ-Menge $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ mit den dichten offenen Mengen $U_n = \bigcup_{i\geq 1} B_{n^{-1}.2^{-i-1}}(q_i)$ für die Aufzählung $\mathbb{Q} = (q_i)_{i\geq 1}$ besitzt wegen $\lambda(U_n) \leq \frac{1}{n}$ und 2.2.5 das Maß $\lambda(U) = 0$. Die **Komplemente** $\mathbb{R} \setminus U_n$ sind **abgeschlossen** und **nirgends dicht** in $\mathbb{R}$, aber mit Maß $\lambda(\mathbb{R} \setminus U_n) = \infty$ und das Komplement $\mathbb{R} \setminus U$ ist eine Menge **1. Kategorie** mit Maß $\lambda(\mathbb{R} \setminus U) = \infty$. (vgl. [7, Abschnitt 14.3])

3.8 Vollständige Maße: Ein Maß μ heißt **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge ebenfalls messbar ist.

1. Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ wird durch Hinzunahme aller Teilmengen von μ-Nullmengen zu einer σ-Algebra $\mathcal{A}_0 = \{A \cup M : A \in \mathcal{A} \wedge M \subset N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\} \supset \mathcal{A}$ **vervollständigt**: Für $A, B \in \mathcal{A}$ sowie $M_A \subset N_A, M_B \subset N_B \wedge \mu(N_A) = \mu(N_B) = 0$ gilt $(A \cup M_A) \setminus (B \cup M_B) = A \setminus (B \cup M_B) \cup M_A \setminus (B \cup M_B) = (A \setminus B) \cap (A \setminus N_B) \cup (N_B \setminus M_B) \cup M_A \setminus (B \cup M_B) \in \mathcal{A}_0$, denn $(A \setminus B) \cap (A \setminus N_B) \in \mathcal{A}$ und $(N_B \setminus M_B) \cup M_A \setminus (B \cup M_B) \subset N_A \cup N_B$ mit $\mu(N_A \cup N_B) = 0$. Die σ-Additivität ist offensichtlich erfüllt.
2. Eine Menge E ist genau dann $\mathcal{A}_0$-messbar, wenn es zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$: Für $E = A \cap M$ mit $M \subset N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(n) = 0$ erfüllt $B := A \cup N$ die Bedingung. Umgekehrt gilt für ein E gemäß der Bedingung $E = A \cup (B \setminus A \cap E)$ mit $B \setminus A \cap E \subset B \setminus A$ und damit $E \in \mathcal{A}_0$.
3. Die entsprechende **Fortsetzung** $\mu_0 \supset \mu$ mit $\mu_0(A \cup N) := \mu(A) \forall A \in \mathcal{A} \wedge N \subset M : \mu(M) = 0$ ist offensichtlich ein vollständiges Maß. Die Fortsetzung des Lebesgue-Borelschen Maßes λ auf der vervollständigten Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_0$ heißt **Lebesgue-Maß** und wird wieder mit λ bezeichnet.

3.9 Fast überall bestehende Eigenschaften: $\mathcal{B}_0$ wird nicht mehr durch die offenen Mengen erzeugt und schränkt die Auswahl der zur Verfügung stehenden Maße bzw. **Verteilungen** ein, so dass man sich in der **Wahrscheinlichkeitstheorie** auf die Vervollständigung **verzichtet**. In der **Analysis** hingegen ist es sehr praktisch, wenn alle Teilmengen von μ-Nullmengen auch selbst wieder das Maß Null haben und insbesondere messbar sind. Bei der **Integration** von Funktionen werden nämlich μ-Nullmengen nicht erfasst, so dass das Verhalten der Funktionen auf diesen Mengen keinen Einfluss auf das Integral hat. Ist μ **vollständig**, so müssen sie dort noch nicht einmal definiert sein und können z.B. punktweise gleich Null gesetzt werden. Allgemein spricht man von **μ-fast überall** bestehenden Eigenschaften, wenn diese nur bis auf μ-Nullmengen erfüllt sind.

4 Messbare Funktionen

4.1 Definitionen: Eine Funktion $f : X \to Y$ in einen **Messraum** $(Y; \mathcal{B})$ heisst **messbar**, wenn jedes Urbild einer in Y messbaren Menge messbar in $(X; \mathcal{A})$ ist: $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B}$. Da sich die üblichen Mengenoperationen auf die Urbilder übertragen (vgl. z.B. [6, Satz 9.2]), genügt es, wenn die Urbilder eines **Erzeugers** messbar in X sind. Eine **numerische Funktion** $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist nach 2.1 schon messbar, wenn die Mengen $\{f \geq a\} := f^{-1}[[a; \infty]]$ oder die analog definierten Bereiche $\{f > a\}$, $\{f \leq a\}$ oder $\{f < a\}$ in X messbar sind. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}$ liegt, sind für zwei messbare $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auch die Mengen $\{f > g\} = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}}(\{f > a\} \cap \{a > g\})$ und $\{f \geq g\} = X \setminus \{f < g\}$ messbar. Beschreibt man das Maß μ der Menge aller $x \in X$, für die der Ausdruck $A(f(x))$ erfüllt ist, so lässt man häufig neben wie bisher dem Argument zusätzlich auch die **Mengenklammern** weg: $\mu(A(f)) = \mu(\{A(f)\}) = \mu(\{x \in X : A(f(x))\})$. **Beispiel**: $\mu(|f| < \epsilon) = \mu(\{|f| < \epsilon\})$

4.2 Bild eines Maßraumes: Das **Bild** $f(\mathcal{A}) := \{B \subset Y : f^{-1}[B] \in \mathcal{A}\}$ der σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X unter der Abbildung $f : X \to Y$ ist eine σ-Algebra auf Y und außerdem die **größte** σ-Algebra, für die f messbar ist. Das **Bildmaß** $f(\mu) : f(\mathcal{A}) \to [0; \infty]$ mit $f(\mu)(B) := \mu(f^{-1}[B])$ ist offensichtlich ein Maß auf $f(\mathcal{A})$ und **transitiv** bezüglich der **Verkettung**: $g \circ f(\mu) : g \circ f(\mathcal{A}) \to [0; \infty]$ mit $g \circ f(\mu)(C) := \mu(f^{-1}[g^{-1}[C]])$ ist wieder ein Maß. Z.B. ist das **Lebesgue-Maß** λ **invariant** unter der **Translation** $f(x) = x + x_0$ mit $f(\lambda)([a; b[) = \lambda(f^{-1}[[a; b[]) = \lambda([a - x_0; b - x_0[) = \lambda([a; b[)$, aber nicht gegenüber der **Streckung** $g(x) = mx$, denn $g(\lambda)([a;b[) = \lambda(g^{-1}[[a;b[]) = \lambda\left(\left[\frac{a}{m};\frac{b}{m}\right[\right) = \frac{1}{m}\lambda([a;b[)$.

4.3 Urbild eines Messraumes: Das **Urbild** $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ der von der Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf Y unter der Abbildung $f : X \to Y$ ist die **kleinste** σ-Algebra, für die f messbar ist. Die Inklusion $\subset$ gilt, weil $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ eine σ-Algebra ist, welche alle Mengen $f^{-1}(\mathcal{E})$ enthält. Die Inklusion $\supset$ folgt aus 4.2, denn das **Bild** $f(\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})))$ ist eine σ-Algebra auf Y, welche $\mathcal{E}$ und damit auch $\sigma(\mathcal{E})$ enthält.

4.4 Stetige Funktionen: Eine Funktion $f : (X;\mathcal{A}) \to (Y;\sigma(\mathcal{O}_Y))$ in einen **topologischen Raum** $(Y;\mathcal{O}_Y)$ ist wegen 4.3 schon **Borel-messbar**, wenn jedes Urbild einer **offenen Menge** messbar in $(X;\mathcal{A})$ ist: $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{O}_Y)) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{O}_Y)) \subset \mathcal{A}$. Besitzt auch X eine Topologie $\mathcal{O}_X$ mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{O}_X)$, so ist insbesondere jede **stetige Funktion** Borel-messbar.

4.5 Zusammengesetzte Funktionen: Die **Verkettung** $h = g \circ f : X \to Z$ ist genau dann messbar, wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ messbar sind. Nach z.B. [7, Beispiele zu 10.7] sind

- die **Projektionen** $(x;y) \mapsto x$ bzw. $(x;y) \mapsto y$ und die **euklidische Norm** $(x;y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ für $\overline{\mathbb{C}} \simeq \overline{\mathbb{R}^2} \to \overline{\mathbb{R}}$
- das **Vielfache** $x \mapsto \alpha \cdot x$ und **Potenzen** $x \mapsto x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ sowie insbesondere der **Kehrwert** $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$
- die **Addition** $(x;y) \mapsto x+y$ für $\overline{\mathbb{C}}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ und die **Multiplikation** $(x;y) \mapsto x \cdot y$ für $\overline{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0;\infty);(\infty;0)\} \to \overline{\mathbb{C}}$

stetig und nach 4.4 messbar. Daher sind für messbare $f, g : X \to \overline{\mathbb{C}}$ auch **Realteil** $\mathrm{Re}f$, **Imaginärteil** $\mathrm{Im}f$ und **Betrag** $\|f\|$ jeweils für $X \to \overline{\mathbb{R}}$ sowie $\alpha \cdot f$, f^α, $\frac{1}{f}$, $f+g$ und $f \cdot g$ für $X \to \overline{\mathbb{C}}$ messbar. Dabei wird das Produkt an den Stellen $\{x \in X : f(x) = 0 \wedge g(x) = \infty \vee f(x) = \infty \wedge g(x) = 0\}$ nach 2.1 zu $f(x) \cdot g(x) := 0$ definiert und die Messbarkeit von Mengen, welche diese Stellen enthalten, durch die Messbarkeit der Menge $\{f = 0\} \cup \{g = 0\}$ gewährleistet.

4.6 Halbstetige Funktionen: Eine reelle Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem topologischen Raum $(X;\mathcal{O})$ heißt **halbstetig** nach oben bzw. nach unten, wenn $f^{-1}\,]a;\infty[\in \mathcal{O}$ bzw. $f^{-1}\,]-\infty;b[\in \mathcal{O}$ jeweils $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Nach 1.6 sind halbstetige Funktionen **Borel-messbar**.

4.7 Funktionenfolgen: Für eine Folge messbarer **numerischer** Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Messraum $(X;\mathcal{A})$ sind wegen 4.1 auch $\inf\limits_{n\geq 0} f_n(x) := \inf\limits_{n\geq 0}\{f_n(x)\}$, $\sup\limits_{n\geq 0} f_n(x) := \sup\limits_{n\geq 0}\{f_n(x)\}$, $\limsup\limits_{n\geq 0} f_n(x) := \inf\limits_{n\geq 0}\left(\sup\limits_{k\geq n} f_k(x)\right)$ und $\liminf\limits_{n\geq 0} f_n(x) := \sup\limits_{n\geq 0}\left(\inf\limits_{k\geq n} f_k(x)\right)$ messbar, denn es gilt $\left\{x \in X : \inf\limits_{k\geq n} f_k(x) > a\right\} = \bigcap\limits_{k\geq n}\{x \in X : f_k(x) > a\}$ und $\left\{x \in X : \sup\limits_{k\geq n} f_k(x) > a\right\} = \bigcup\limits_{k\geq n}\{x \in X : f_k(x) > a\}$. Insbesondere sind für messbare numerische Funktionen f auch **Positivteil** $f^+ := \max\{f;0\}$ sowie **Negativteil** $f^- := \min\{f;0\}$ und für eine weitere messbare numerische Funktion auch **Maximum** $\max\{f;g\}$ sowie **Minimum** $\min\{f;g\}$ messbar. Eine **komplexwertige** Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ ist nach 4.5 genau dann messbar, wenn dies für **Realteil** und **Imaginärteil** $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt. Damit ist auch die **Limesfunktion** $\lim\limits_{n\geq 0} f_n$ einer punktweise konvergenten Folge **komplexwertiger** Funktionen messbar.

4.8 Elementarfunktionen: Die einfachsten messbaren Funktionen auf einem Messraum $(X;\mathcal{A})$ sind die **charakteristischen Funktionen** $\chi_A : X \to \{0;1\}$ für eine messbare **Trägermenge** $A \in \mathcal{A}$ mit $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$. Sie hat die gleiche Zuordnungvorschrift wie die **Diracsche Einheitmasse** ϵ_x aus 2.3.1 mit vertauschten Rollen für x und A. Die **Elementarfunktionen** $\mathcal{E}(X) = \left\{\sum_{0\leq i\leq m}\alpha_i\chi_{A_i} : m \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{R}_+,\ A_i \in \mathcal{A}\right\}$ bilden eine reelle **Algebra** (vgl. [7, Definition 15.9]) messbarer Funktionen, welche mit zwei Funktionen f und g auch $\max\{f;g\}$ und $\min\{f;g\}$ enthält. Die Abgeschlossenheit gegenüber linearen Operationen, Multiplikation sowie der Bildung von Maxima und Minima wird offensichtlich, wenn man für zwei Elementarfunktionen $f = \sum_{0\leq i\leq m}\alpha_i\chi_{A_i}$ und

$g=\sum_{0\leq j\leq n}\beta_j\chi_{Bj}$ mit o.B.d.A. paarweise disjunkten **Trägermengen** $A_i$und B_j die Darstellungen $f=\sum_{0\leq i\leq m}\sum_{0\leq j\leq n}\alpha_i\chi_{A_i\cap B_j}$ bzw. $g=\sum_{0\leq i\leq m}\sum_{0\leq j\leq n}\beta_j\chi_{A_i\cap B_j}$ mit gemeinsamen, wieder paarweise disjunkten Trägermengen $A_i\cap B_j$ wählt und $\chi_A\cdot\chi_B=\chi_{A\cap B}$ beachtet.

4.9 Satz: Jede **positive, numerische** Borel-messbare Funktion auf einem Messraum $(X;\mathcal{A})$ lässt sich als Supremum einer aufsteigeden Folge von Elementarfunktionen darstellen. Die Algebra der Elementarfunktionen liegt bezüglich der Topologie der **punktweisen Konvergenz** dicht in der Menge der **positiven** Borel-messbaren Funktionen.

Beweis: Jede positive **numerische**, Borel-messbare Funktion $f:X\to\overline{\mathbb{R}}_+$ ist offensichtlich das Supreumum der **aufsteigenden** Folge $(s_n\circ f)_{n\geq 0}$ von Elementarfunktionen mit $s_n=\sum_{0\leq k\leq n\cdot 2^n}k\cdot 2^{-n}\chi_{A_{nk}}$ sowie $A_{nk}:=]k\cdot 2^{-n};(k+1)\cdot 2^{-n}]$ für $k<n\cdot 2^n$ bzw. $A_{n;n\cdot 2^n}:=]n;\infty]$. Für positive **endliche** f existiert für jedes $x\in X$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $f(x)<n_0$ und $\forall\epsilon>0\,\exists n\geq n_0:\ 2^{-n}<\epsilon$, so dass $\exists k\leq n\cdot 2^n:\ k\cdot 2^{-n}<f(x)\leq(k+1)\cdot 2^{-n}$ und damit $(s_n\circ f)(x)=k\cdot 2^{-n}<f(x)$ und $|(s_n\circ f)(x)-f(x)|<\epsilon$, also $\lim\limits_{n\geq 0}(s_n\circ f)(x)=f(x)$. Wegen 4.7 ist umgekehrt jede Limesfunktion einer Folge von Elementarfunktionen messbar.

4.10 Konvergenz im Maß und μ-fast überall: Eine Eigenschaft $E(x)$ besteht **μ-fast überall** auf einem Maßraum $(X;\mathcal{A};\mu)$, wenn $\mu(X\setminus\{E(x)\})=0$. Eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ Borel-messbarer Funktionen $f_n:(X;\mathcal{A};\mu)\to(Y;\|\|)$ in einen **Banachraum** Y konvergiert gegen ein ebenfalls Borel-messbares $f:(X;\mathcal{A};\mu)\to(Y;\|\|)$

1. **μ-fast überall**, wenn

   a) $\mu\left(X\setminus\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|=0\right\}\right)=0\Leftrightarrow$

   b) $\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(\sup\limits_{n\geq k}\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon\right)\overset{*}{=}\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n\geq k}\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon\}\right)$
   $\overset{*}{=}\mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon\}\right)=0$ für alle $\epsilon>0\Leftrightarrow$

   c) $\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(\sup\limits_{n\geq k}\|f_n(x)-f(x)\|\geq\frac{1}{n}\right)\overset{*}{=}\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n\geq k}\left\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\frac{1}{n}\right\}\right)$
   $\overset{*}{=}\mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}\left\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\frac{1}{n}\right\}\right)=0.$

2. **im Maß** μ, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon)=0$ für alle $\epsilon>0$.

Bemerkungen:

1. Die Gleichheiten $\overset{*}{=}$ sind nur erfüllt, **wenn μ endlich ist**.
2. Aus den Definitionen folgt, dass sowohl die Grenzfunktion f als auch **schließlich** (d.h. bis af endlich viele) alle f_n für beide Konvergenzkriterien **μ-fast überall endlich** sein müssen.
3. Im Fall eines **Wahrscheinlichkeitsmaßes** spricht man auch von **stochastischer Konvergenz**. Die wichtigen Konvergenzsätze 4.11 - 4.15 gelten nur für endliche Maßräume und werden der Übersichtlichkeit halber auch nur für den mit Abstand wichtigsten Falle eines **Wahrscheinlichkeitsraumes** bewiesen..

Beweis für die Äquivalenzen in 1.: Beachte, dass für die Anwendung von 2.2.5 für die jeweils erste Gleichheit $\overset{*}{=}$ in b) bzw. c) ein $k_0\in\mathbb{N}$ existieren muss, so dass $\mu\left(\bigcup_{n\geq k_0}\left\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon\text{ bzw. }\frac{1}{n}\right\}\right)<\infty$ erfüllt ist.

a)$\Leftrightarrow$b): $\liminf\limits_{n\geq 1}\|f_n(x)-f(x)\|>0\Leftrightarrow\exists\epsilon>0\forall k\geq 1\exists n\geq k:\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon.$

b)$\Leftrightarrow$c): $x\in X\setminus\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}\left\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\frac{1}{n}\right\}=\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\left\{\|f_n(x)-f(x)\|<\frac{1}{n}\right\}\Leftrightarrow$
$\exists k_x\geq 1\forall n\geq k_x:\ \|f_n(x)-f(x)\|<\frac{1}{n}\Leftrightarrow$
$x\in\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\{\|f_n(x)-f(x)\|<\epsilon\}=X\setminus\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}\{\|f_n(x)-f(x)\|\geq\epsilon\}$ für alle $\epsilon>0$.

4.11 Konvergenzsatz von Lebesgue: Jede **μ-fast überall** gegen eine Borel-messbare Funktion f konvergierende Folge **μ-fast überall endlicher,** Borel-messbarer Funktionen $(f_n)_{n\geq 1}$ auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X;\mathcal{A};\mu)$ konvergiert auch **stochastisch** μ gegen f.

Beweis: Mit $E = \bigcap_{n\geq 1}\{\|f_n\| = \infty\}$ und $\mu(E) = 0$ erhält man $\inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{n\geq k}\mu(\{\|f_n(x) - f(x)\| \geq \epsilon\} \cap E) < \inf\limits_{k\geq 1}\mu\left(\bigcup_{n\geq k}\{\|f_n(x) - f(x)\| \geq \epsilon\} \cap E\right) = \mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}\{\|f_n(x) - f(x)\| \geq \epsilon\} \cap E\right) = 0$ für alle $\epsilon > 0$ wegen 2.2.3 und 2.2.5.

4.12 Lemma von Borel-Cantelli: Für eine Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ messbarer Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X;\mathcal{A};\mu)$ gilt $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 0$ und im Fall der **Unabhängigkeit** der A_n auch die **Umkehrung** $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n) = \infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 1$.

Beweis: Da es im ersten Fall für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_\epsilon \geq 1$ gibt mit $\sum_{n\geq k_\epsilon}\mu(A_n) < \epsilon$, folgt sofort $\mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq k_\epsilon} A_n\right) \leq \sum_{n\geq k_\epsilon}\mu(A_n) < \epsilon$ und damit die Behauptung. Mit 2.2.4 sowie der **Stetigkeit** der **Exponentialfunktion** erhält man im Fall der **Umkehrung** $\mu\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n\right)$ $= 1 - \mu\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} X \setminus A_n\right) = 1 - \lim\limits_{k\geq 1}\lim\limits_{n\geq k}\mu\left(\bigcap_{n\geq i\geq k} X \setminus A_i\right) = 1 - \lim\limits_{k\geq 1}\lim\limits_{n\geq k}\prod_{n\geq i\geq k}(1 - \mu(A_i)) \geq 1 - \lim\limits_{k\geq 1}\lim\limits_{n\geq k}\prod_{n\geq i\geq k}\exp(-\mu(A_i)) = 1 - \lim\limits_{k\geq 1}\lim\limits_{n\geq k}\exp\left(-\sum_{n\geq i\geq k}\mu(A_i)\right) = 1$.

4.13 Vollständigkeit und μ-fast sicher konvergente Teilfolgen bei stochastischer Konvergenz: Für eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ Borel-messbarer, endlicher Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X;\mathcal{A};\mu)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Für jedes $\epsilon > 0$ ist $\lim\limits_{k\geq 1}\sup\limits_{n\geq k}\mu(|f_n - f_k| > \epsilon) = 0$.
2. $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert **stochastisch** gegen eine Borel-messbare, endliche Funktion $f : X \to \mathbb{R}$.
3. Jede Teilfolge von $(f_n)_{n\geq 1}$ besitzt wieder eine Teilfolge, welche **μ-fast sicher** gegen die gleiche Borel-messbare, endliche Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. (**Konvergenzsatz von Riesz**)

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2. : Nach Vor. gibt es für jedes $k \geq 1$ ein $n_k \geq 1$ mit $\mu\left(|f_n - f_{n_k}| > 2^{-k}\right) < 2^{-k}$ für alle $n \geq n_k$. Für die Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$mit o.B.d.A. $n_{k+1} > n_k$ und $A_k = \left\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\right\}$ gilt dann $\sum_{k\geq 1}\mu(A_k) < \infty$. Für $A = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{k\geq m}(X \setminus A_k)$ folgt $\mu(A) = 1$ nach 4.12, so dass für jedes $x \in A$ ein $m \geq 1$ existiert mit $\sup\limits_{k\geq m}|f_{n_k}(x) - f_{n_m}(x)| \leq \sum_{k\geq m}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{k\geq m} 2^{-k} = 2^{-m+1}$. Da die Mengenfolge $\left(\bigcap_{k\geq m}(X \setminus A_k)\right)_{m\geq 1}$ aufsteigend ist, kann aber m beliebig groß gewählt werden, so dass das Cauchy-Kriterium erfüllt ist und aufgrund der **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$ für jedes $x \in A$ ein $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \in \mathbb{R}$ existiert. Nach 4.7 ist auch $f : A \to \mathbb{R}$ messbar und für jedes $\epsilon > 0$ gibt es nach 4.11 ein $m_\epsilon \geq 1$, so dass $\mu\left(|f_{n_m} - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $m \geq m_\epsilon$. Für alle $n \geq n_m$ mit $m \geq \max(m_\epsilon; k)$ und $2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$ folgt dann $\mu(|f_n - f| > \epsilon) \leq \mu\left(\{|f_n - f_{n_m}| > \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{|f_{n_m} - f| > \frac{\epsilon}{2}\}\right) \leq \mu\left(|f_m - f_{n_m}| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mu\left(|f_{n_m} - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) < \epsilon$ und damit die Behauptung.

2. $\Rightarrow$ 3. : Zunächst konvergiert mit $(f_n)_{n\geq 1}$ auch jede Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ stochastisch gegen f. Wähle aufeinanderfolgende $k(j{+}1) \geq k(j) \geq 1$ für $j \geq 1$, so dass für $A_j = \left\{\left\|f_{n_{k(j)}}(x) - f(x)\right\| \geq \frac{1}{j}\right\}$ gilt $\mu(A_j) < 2^{-j}$, woraus mit 2.2.3 folgt $\mu\left(\bigcup_{j\geq m} A_j\right) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$ und damit $\mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{j\geq m} A_j\right) = 0$ nach 2.2.5. Die Behauptung erhält man dann aus 4.10.1 c).

3. $\Rightarrow$ 1. : Angenommen, es gibt für ein $\epsilon > 0$, so dass für jedes $n_k \geq 1$ ein $n_{k+1} \geq n_k$ existiert mit $\mu\left(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > \epsilon\right) > \epsilon$, dann erhält man wie im ersten Teil des Beweises die Abschätzung $\mu\left(|f_{n_k} - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mu\left(|f_{n_{k+1}} - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) \geq \mu\left(|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \epsilon\right) > \epsilon$, d.h., entweder $\mu\left(|f_{n_k} - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) \geq \frac{\epsilon}{2}$ oder $\mu\left(|f_{n_{k+1}} - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Durch fortlaufende Auswahl der f_{n_k} mit jeweils größeren Abweichungswahrscheinlichkeit $\mu(\ldots)$ erhält man eine Teilfolge $\left(f'_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ mit $\mu\left(\left|f'_{n_k} - f\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \geq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $k \geq 1$, so dass keine Teilfolge dieser Teilfolge stochastisch gegen f konvergieren kann und nach dem Konvergenzsatz 4.12 von Lebesgue gilt dies insbesondere auch für μ-fast sichere Konvergenz.

4.14 Vollständigkeit bei μ-fast sicherer Konvergenz: Eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ Borel-messbarer, endlicher Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X; \mathcal{A}; \mu)$ konvergiert genau dann **μ-fast sicher** gegen ein Borel-messbares, endliches $f : X \to \mathbb{R}$, wenn $\lim_{k\to\infty} \mu\left(\sup_{n\geq k} |f_k - f_n| > \epsilon\right) = 0 \ \forall \epsilon > 0$.

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus 4.10 b) mit $\mu\left(\sup_{n\geq k} |f_k - f_n| > \epsilon\right) \leq \mu\left(|f_k - f| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mu\left(\sup_{n\geq k} |f - f_n| > \frac{\epsilon}{2}\right)$ wie im Beweis zu 4.14. $\Leftarrow$ folgt aus 4.13.1, denn $\sup_{n\geq k}\mu\left(|f_k - f_n| > \epsilon\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq k} |f_k - f_n| > \epsilon\right) = \mu\left(\sup_{n\geq k} |f_k - f_n| > \epsilon\right)$ und damit konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ zunächst **stochastisch** gegen f . Dann folgt aber wieder wie in 4.10 b) mit $\mu\left(\sup_{n\geq k} |f - f_n| > \epsilon\right) \leq \mu\left(|f - f_k| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mu\left(\sup_{n\geq k} |f_k - f_n| > \frac{\epsilon}{2}\right)$ die **μ-fast sichere** Konvergenz gegen f.

4.15 Konvergenzsatz von Egorov: Für jede **μ-fast überall** gegen f konvergierende **μ-fast überall endlich**e Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X; \mathcal{A}; \mu)$ und jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Menge $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$, so dass $(f_n)_{n\geq 1}$ auf A_ϵ **gleichmäßig** konvergiert.

Beweis: Wegen 14.10.1 c) gibt es für $\epsilon > 0$ ein $k_\epsilon \geq 1$, so dass für $A_\epsilon := \bigcap_{n\geq k_\epsilon} \left\{\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{1}{n}\right\}$ gilt $\mu(X \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ und offensichtlich konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ auf A_ϵ **gleichmäßig.**

4.16 Beispiele:

1. Auf $\left([0;1]; \mathcal{B}_{[0;1]}; \lambda_{[0;1]}\right)$ konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n = \chi_{\left[\frac{j}{2^k}; \frac{j+1}{2^k}\right]}$ für $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$ und $k \geq 1$ zwar **im Maß** λ gegen $f = 0$, aber für kein $x \in [0;1]$ und insbesondere **nicht λ-fast überall**.
2. Auf $(\mathbb{R}; \mathcal{B}; \lambda)$ konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n = \chi_{[n;n+1]}$ für $n \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und insbesondere **λ-fast überall** gegen $f = 0$, aber **nicht im Maß** λ**,** denn für $\epsilon < 1$ gibt es kein $k \geq 1$, so dass $\lambda\left(\bigcup_{n\geq k} \{\|f_n(x) - f(x)\| \geq \epsilon\} \cap E\right) < \infty$ und die Stetigkeit von oben (2.2.5) bzw. Satz 4.12 lassen sich daher nicht anwenden.

5 Integration

5.1 Definition: Ein komplexwertiges **Funktional** $I : \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{C}}$ auf einem **Vektorraum** $\mathcal{L}(X) \subset \overline{\mathbb{C}}^X$ **komplexwertiger** Funktionen auf einer Menge X heißt **Integral**, wenn für $\alpha, \beta \in I[\mathcal{L}(X)]$ und $f, g \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

1. $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ (**Linearität**)
2. $\|f\| \leq \|g\| \Rightarrow \|I(f)\| \leq \|I(g)\|$ (**Monotonie**)

$\mathcal{L}^1(X) = \{f \in \mathcal{L}(X) : I(\|f\|) < \infty\}$ ist der Untervektorraum der **integrierbaren** Funktionen.

5.2 Integral für Elementarfunktionen: Auf der Algebra $\mathcal{E}(X)$ der **Elementarfunktionen** eines **Maßraumes** $(X; \mathcal{A}; \mu)$ wird durch $\int f d\mu := \sum_{0\leq i\leq m} \alpha_i \mu(A_i)$ für $f = \sum_{0\leq i\leq m} \alpha_i \chi_{A_i}$ ein **Integral** definiert. **Eindeutigkeit**, **Linearität** und **Monotonie** sind offensichtlich, wenn man für zwei Elementarfunktionen f und g wie in 4.6 Darstellungen mit gemeinsamen, wieder paarweise disjunkten **Trägermengen** $A_i \cap B_j$ wählt und die **Additivität** 2.2 des Maßes berücksichtigt.

5.3 Satz: Für jede **aufsteigende** Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ und jedes $f \in \mathcal{E}(X)$ mit $f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ gilt auch $\int f d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

Beweis: Wegen 4.1 bilden die Mengen $B_n = \{f_n \geq \alpha f\}$ für jedes $\alpha \in]0;1[$ eine aufsteigende Folge messbarer Mengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$. Mit $f = \sum_{0\leq i\leq m} \alpha_i \chi_{A_i}$ und $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A\cap B}$ und wegen 2.2.4

gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f\chi_{B_n} d\mu = \sum_{0\leq k\leq n} \alpha_i \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_i \cap B_n\right) = \sum_{0\leq i\leq n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A_i\cap B_n\right)\right) = \sum_{0\leq i\leq n} \alpha_i \mu\left(A_i\right) = \int f d\mu$. Mit $\alpha f \chi_{B_n} \leq f_n$ sowie wegen 5.1.1 und 5.1.2 gilt aber auch $\alpha \int f\chi_{B_n} d\mu \leq \int f_n d\mu$ und da beide Seiten aufsteigend sind, folgt $\alpha \int f d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha \int f\chi_{B_n} d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$ und damit die Behauptung.

5.4 Integral für positive numerische, Borel-messbare Funktionen: Für jede positive numerische, Borel-messbare Funktion $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to [0;\infty]$ mit einer aufsteigenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ gemäß Satz 4.9 wird durch $\int f d\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$ ein Integral definiert. Die **Eindeutigkeit** ergibt sich aus Satz 5.3, denn für zwei aufsteigende Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ gilt $\int f_n d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n d\mu$ und umgekehrt für jeweils alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem gleichen Argument nur für eine Richtung erhält man die **Monotonie** und aufgrund der Unabhängigkeit des Integrals von der Wahl der Näherungsfolge und der Linearität des Supremums für **positive reelle** Faktoren α und β gilt auch die **Linearität**, denn $\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (\alpha f_n + \beta g_n)\, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\alpha \int f_n d\mu + \beta \int g_n d\mu\right) = \alpha \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu + \beta \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$.

5.5 Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi): Für jede **aufsteigende** Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver, numerischer, Borel-messbarer Funktionen auf $(X;\mathcal{A};\mu)$ gilt $\int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

Beweis: Wegen der Monotonie des Integrals gilt zunächst $\int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$. Für die Umkehrung betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge $(e_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} e_{nk} = f_n$, so dass die Funktionen $\hat{e}_n := \max\{e_{kk} : 0 \leq k \leq n\} \in \mathcal{E}(X)$ wieder eine aufsteigende Folge bilden mit $\hat{e}_n \leq f_n$, insbesondere wieder wegen der Monotonie des Integrals $\int \hat{e}_n d\mu \leq \int f_n d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und außerdem $\sup_{n\in\mathbb{N}} \hat{e}_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, womit folgt $\int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \hat{e}_n d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

5.6 Lemma von Fatou: Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver, numerischer, Borel-messbarer Funktionen auf einem Maßraum $(X;\mathcal{A},\mu)$ gilt $\int \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

Beweis: Nach 4.5 und 5.5 gilt $\int \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} f_k\right) d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \left(\inf_{k\geq n} f_k\right) d\mu$. Wegen der Monotonie des Integrals gilt aber auch $\int \left(\inf_{k\geq n} f_k\right) d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int f_k d\mu$ und damit die Behauptung.

5.7 μ-fast überall bestehende Eigenschaften integrierbarer Funktionen: Für eine integrierbare positive numerische Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt:

1. f ist **μ-fast überall** endlich, denn wegen der Montonie des Integrals und $n\chi_{\{f=\infty\}} < f$ gilt $n \cdot \mu\left(\{f = \infty\}\right) < \int f d\mu < \infty$ für alle $n \geq 1$ und daher $\mu\left(\{f = \infty\}\right) = 0$. Die Toleranz des Integrals für **Polstellen** mit Maß Null ist eine direkte Konsequenz der Definition $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$ (vgl. 1.5).

2. Die Menge $\{f \neq 0\}$ ist **σ-endlich**, denn wegen $\chi_{\{nf\geq 1\}} < nf$ gilt $\mu\left(\{nf \geq 1\}\right) < n \int f d\mu < \infty$ und damit $\bigcup_{n\geq 1} \{nf \geq 1\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} = \{f \neq 0\}$.

3. Ist umgekehrt $\int f d\mu = 0$, so gilt für $A_n = \left\{f > \frac{1}{n}\right\}$ die Abschätzung $\frac{1}{n}\mu\left(A_n\right) \leq \int_{A_n} f\, d\mu \leq \int f\, d\mu = 0$, also $\mu\left(\{f > 0\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$ wegen 2.2.4, also μ-fast überall $f(x) = 0$.

5.8 Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue): Jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver, numerischer, Borel-messbarer Funktionen die **μ-fast überall** gegen $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n := f$ konvergiert und eine integrierbare **Majorante** $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f_n \leq g \forall n \in \mathbb{N}$ besitzt, konvergiert auch **im Mittel** gegen f: $\lim_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Beweis: Wegen $\liminf_{n\in\mathbb{N}} \left(g - |f - f_n|\right) = g$ und $\int \left(g - |f - f_n|\right) d\mu + \int |f - f_n|\, d\mu = \int g d\mu$ folgt aus 5.6 die Abschätzung $\int g d\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int \left(g - |f - f_n|\right) d\mu = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \left(\int g d\mu - \int |f - f_n|\, d\mu\right) = \int g d\mu -$

$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \int |f-f_n|\, d\mu \Leftrightarrow \limsup_{n\in\mathbb{N}} |\int f d\mu - \int f_n d\mu| = \limsup_{n\in\mathbb{N}} \int |f-f_n|\, d\mu \leq 0$. Die μ-Null-Mengen, auf denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **nicht konvergiert**, haben keinen Einfluss auf das Integral.

5.9 Vergleich mit dem Riemann-Integral:

1. Jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a;b] \to [0;\infty[$ ist auch Lebesgue-integrierbar und die beiden Integrale stimmen überein: $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f d\lambda$.
2. $f : \mathbb{R} \to [0;\infty[$ ist **genau dann** über ganz $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, wenn das **uneigentliche** Riemann-Integral existiert und in diesem Fall stimmen die beiden Integrale wieder überein: $\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{-n}^n f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Beweis:

1. Zu jeder endlichen Partition $z_n := (a = a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n = b)$ des Intervalls $[a;b]$ können Untersumme $U_{z_n} := \sum_{i=0}^{n} \gamma_i (a_i - a_{i-1}) = \int_{[a;b]} u_{z_n} d\lambda$ mit $\gamma_i := \inf f[[a_{i-1};a_i]]$ bzw. Obersumme $O_{z_n} := \sum_{i=0}^{n} \Gamma_i (a_i - a_{i-1}) = \int_{[a;b]} o_{z_n} d\lambda$ mit $\Gamma_i := \sup f[[a_{i-1};a_i]]$ als Lebesgue Integrale der Elementarfunktionen $u_{z_n} := \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \chi_{[a_{i-1};a_i]}$ bzw. $o_{z_n} := \sum_{i=0}^{n} \Gamma_i \chi_{[a_{i-1};a_i]}$ betrachtet werden. Nach Voraussetzung gibt es Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen, so dass z_{n+1} eine Verfeinerung ist von z_n und $\lim_{n\to\infty} U_{z_n} = \lim_{n\to\infty} O_{z_n} = \int_a^b f(x)dx$. Da $(o_{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fällt und $(u_{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigt, existiert der Grenzwert $\lim_{n\in\mathbb{N}} (o_{z_n} - u_{z_n})$. Nach 5.6 folgt $0 \leq \int \lim_{n\in\mathbb{N}} (o_{z_n} - u_{z_n}) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} (O_{z_n} - U_{z_n}) = 0$ und nach 5.7 ist λ-fast überall $\lim_{n\in\mathbb{N}} (o_{z_n} - u_{z_n}) = 0$. Da außerdem λ-fast überall $u_{z_n} \leq f \leq o_{z_n}$, folgt λ-fast überall $\lim_{n\in\mathbb{N}} u_{z_n} = f$. Mit der Majorante o_{z_0} lässt sich schließlich 5.8 anwenden und ergibt $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{[a;b]} u_{z_n} d\lambda = \int_{[a;b]} \left(\lim_{n\in\mathbb{N}} u_{z_n}\right) d\lambda = \int_{[a;b]} f d\lambda$.
2. Nach 1. und 5.5 gilt $\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{-n}^n f(x)dx = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{[-n;n]} f d\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f \cdot \chi_{[-n;n]} d\lambda = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f \cdot \chi_{[-n;n]} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Bemerkung: Die in 5.5, 5.6 und schließlich 5.8 zum Ausdruck kommende **Stetigkeit** des Lebesgue-Integrals gegenüber **punktweiser** bzw. μ-fast überall-**Konvergenz** ist beim Riemann-Integral nur für **gleichmäßige Konvergenz** der Integranden erfüllt (vgl.[8, Th 7.16]).

5.10 Integral auf Teilmengen: Das Integral $\int_A f d\mu := \int f|_A d\mu = \int f d\mu|_A$ über die Teilmenge $A \subset X$ auf einem Maßraum $(X;\mathcal{A};\mu)$ ist wohldefiniert, denn wegen $\int e|_A d\mu = \int e \cdot \chi_A d\mu = \int \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_i \chi_{A_k} \cdot \chi_A\right) d\mu = \int \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_i \chi_{A_k \cap A}\right) d\mu = \sum_{0\leq k\leq n} a_i \cdot \mu(A_k \cap A) = \sum_{0\leq k\leq n} a_i \cdot \mu|_A (A_k) = \int e d\mu|_A$ gilt die rechte Identität für Elementarfunktionen und da wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} e_n = f$ auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} e_n|_A = f|_A$ gilt, folgt $\int f|_A d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int e_n|_A d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int e_n d\mu|_A = \int f d\mu|_A$. Linearität und Monotonie des Integrals sind offensichtlich, da es sich um eine Beschränkung des Funktionals auf den Untervektorraum der A-messbaren Funktionen handelt. Für **disjunkte Teilmengen** $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt offensichtlich $\int_{A \mathring{\cup} B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_b f d\mu$.

5.11 Integral für numerische Funktionen: Eine numerische, Borel-messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann **integrierbar**, wenn Positiv- und Negativteil **integrierbar** sind. In diesem Fall wird durch $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int (-f^-) d\mu$ ein Integral definiert. Die Linearität ergibt sich für $\alpha \geq 0$ wie in 5.4 und für $\alpha = -|\alpha| < 0$ aus $\int \alpha f d\mu = \int (-|\alpha| f) d\mu = \int (-|\alpha| f)^+ d\mu - \int \left(-(-|\alpha| f)^-\right) d\mu = \int (-|\alpha| f^-) d\mu - \int |\alpha| f^+ d\mu = -\int |\alpha| f^+ d\mu + \int (-|\alpha| f^-) d\mu = -|\alpha| \left(\int f^+ d\mu - \int (-f^-) d\mu\right) = \alpha \int f d\mu$. Die Additivität folgt direkt aus der getrennten Berechnung von Positiv- und Negativteilen. Die Monotonie ergibt sich aus der Monotonie des Integrals für positive Funktionen. Die getrennte Berechnung von Positiv- und Negativteil ist einerseits Grundbedingung für die majorisierte Konvergenz, welche das Riemann-Integral nicht erfüllt. Andererseits führt sie zum Versagen des Lebesgue-Integrals bei gewissen Riemann-integrierbaren Integranden mit **alternierendem Vorzeichen** wie z.B. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. (vgl [9, p.115 ex. 22])

5.12 Integral für komplexwertige Funktionen: Eine komplexwertige, Borel-messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ ist wegen der Monotonie des Integrals für positive numerische Funktionen und $\max\{|\mathrm{Re} f|; |\mathrm{Im} f|\} \leq \|f\| \leq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f|$ genau dann **integrierbar**, wenn Real- und Imaginärteil **integrierbar** sind. In diesem Fall wird durch $\int f d\mu := \int \mathrm{Re} f d\mu + i \int \mathrm{Im} f d\mu$ ein **lineares Funktional definiert, welches nicht mehr monoton** ist. Z.B gilt für $f = 1$ und $g(t) = 2e^{it}$ auf $X = [0; 2\pi]$ einerseits $1 = \|f\| < \|g\| = 2$, aber andererseits $2\pi = \|\int f d\mu\| > \|\int g d\mu\| = 0$. Die Linearität ergibt sich für reelles $\alpha \in \mathbb{R}$ wie in 5.11 sowie für imaginäres $i\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ aus $\int i\beta f d\mu = \int \mathrm{Re}\,(i\beta f)\, d\mu + i \int \mathrm{Im}\,(i\beta f)\, d\mu = \int \beta \mathrm{Im}\,(-f)\, d\mu + i \int \beta \mathrm{Re} f d\mu = -\beta \int \mathrm{Im} f d\mu + i\beta \int \mathrm{Re} f d\mu = i\beta \int f d\mu$ und schließlich für komplexes $\alpha + i\beta$ aus dem Distributivgesetz sowie der Additivität, welche direkt aus der getrennten Berechnung von Imaginär- und Realteilen folgt. Wie die folgenden Sätze zeigen, bleiben alle anderen typischen Integraleigenschaften aber erhalten und man spricht daher auch bei dieser Erweiterung des Lebesgue-Integrals i.A. vom **Integral**.

5.13 Für den **Betrag komplexwertiger Integrale** gilt die Ungleichung $\|\int f d\mu\| \leq \int \|f\|\, d\mu$, denn mit $\int f d\mu = e^{i\alpha} \cdot \|\int f d\mu\|$ folgt $\|\int f d\mu\| = e^{-i\alpha} \cdot \int f d\mu = \int \left(e^{-i} \cdot f\right) d\mu = \int \left(\mathrm{Re}\left(e^{-i} \cdot f\right)\right) d\mu \leq \int \|f\|\, d\mu$. Im Fall der Gleichheit $\|\int f d\mu\| = \int \|f\|\, d\mu$ folgt aus 5.7.1 μ-fast überall $e^{-i\alpha} \cdot f = \|f\|$ bzw. $f = e^{i\beta} \cdot \|f\|$.

5.14 Mittelwerteigenschaft komplexwertiger Intergale: Ist die komplexwertige, Borel-messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ integrierbar bezüglich eines endlichen Maßes μ und liegen die Mittelwerte $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu$ für jede messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ in der abgeschlossenen Menge $S \subset \mathbb{C}$, so gilt μ-fast überall auch $f(x) \in S$.

Beweis: Angenommen, für die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B}_r(z) \subset \mathbb{C} \setminus S$ gilt $\mu\left(\left\{f \in \overline{B}_r(z)\right\}\right) > 0$, dann folgt $\left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu - z\right| = \left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A (f - z)\, d\mu\right| \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - z|\, d\mu \leq r$ im Widerspruch zu $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu \in S$. Daher muss $\mu\left(\left\{f \in \overline{B}_r(z)\right\}\right) = 0$ gelten und da $\mathbb{C} \setminus S$ als abzählbare Vereinigung solcher Kreisscheiben ddargestellt werden kann, folgt die Behauptung aus der σ-Additivität des Maßes.

5.14 Majorisierte Konvergenz für komplexwertige Funktionen: Satz 5.8 lässt sich zunächst auf numerische Funktionen übetragen, wenn man im Beweis von g auf $2g$ übergeht, um entgegengesetzte Vorzeichen bei f und f_n auszugleichen. Anwendung von 5.13 im letzten Schritt des Beweises zeigt die Aussage auch für komplexwertige Funktionen, wobei die Majorante in diesem Fall natürlich auf den **Betrag** bezogen sein muss: $\|g\| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\|f_n\| \leq \|g\|\, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.15 Majorisierte Konvergenz für komplexe Reihen: Für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexwertiger, μ-fast überall definierter Funktionen mit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \int \|f_n\|\, d\mu < \infty$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n := f$ sowohl **μ-fast überall** als auch **im Mittel:** $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Beweis: Die Funktion $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist auf dem Durchschnitt $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n := D$ der Definitionsbereiche D_n der f_n definiert mit $\mu\,(X \setminus D) = \mu\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus D_n)\right) = 0$. Nach 5.12 bzw. der Dreiecksungleichung bzw. 5.5 gilt $\|\int f d\mu\| \leq \int \|f\|\, d\mu \leq \int \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|\, d\mu = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \int \|f_n\|\, d\mu < \infty$, d.h., $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und wegen 5.7.1 insbesondere μ-fast überall endlich, womit die μ-fast überall-Konvergenz der Partialsummen $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ gezeigt ist. Die Konvergenz im Mittel folgt aus 5.14 mit der Majorante $g := \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|$.

6 L^p-Räume

6.1 Konvexe Funktionen: Eine reelle Funktion $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **konvex** auf dem offenen Intervall $]a; b[$, wenn für alle $a < r < s < t < b$ gilt $f(s) \leq f(r) + (s - r) \cdot \frac{f(t) - f(r)}{t - r} = f(t) - (t - s) \cdot \frac{f(t) - f(r)}{t - r}$ bzw. $\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \geq \frac{f(t) - f(r)}{t - r} \geq \frac{f(s) - f(r)}{s - r}$. Jede konvexe Funktion ist **stetig** und insbesondere **Borel-messbar**, denn für $s \in]a; b[$ und o.B.d.A. $\min\{1; b - s\} > \epsilon > 0$ gilt für $|r - s| < \delta := \frac{\epsilon^2}{\max\{1; |f(s+\epsilon) - f(s)|\}}$ die Abschätzung $|f(r) - f(s)| < |r - s| \cdot \frac{|f(s+\epsilon) - f(s)|}{\epsilon} < \epsilon$.

6.2 Jensen-Ungleichung: Für jede integrierbare Funktion $g : A \to]a;b[\subset \mathbb{R}$ mit $A \subset X$ und $\mu(A) < \infty$ auf einem Maßraum $(X;\mathcal{A},\mu)$ und jede konvexe Funktion $f :]a;b[\to \overline{\mathbb{R}}$ gilt $f\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A g d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_A (f \circ g)\, d\mu$.

Beweis: Für $s := \frac{1}{\mu(A)}\int_A g d\mu$ gilt $a < s < b$ und nach 6.1 außerdem $\beta := \sup\limits_{a<r<s} \frac{f(s)-f(r)}{s-r} \leq \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ für alle $s < t < b$ und daher $f(s)+\beta(t-s) \leq f(t)$ bzw. $f(s)+\beta(g(x)-s) \leq f(g(x))$. Alle Summanden dieser Ungleichung sind messbar und nach Integration über A folgt wegen der Monotonie des Integrals $\mu(A) \cdot f(s) \leq \int_A (f \circ g)\, d\mu$ und damit die Behauptung.

6.3 Anwendungen: Mit $A = \{x_1;...;x_n\} \subset [0;\infty[$ und $\mu(x_i) = \alpha_i$ mit $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ sowie $g(x) = \ln(x)$ und $f(x) = \exp(x)$ erhält man aus 6.2 die Ungleichungen

1. $x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$
2. $(x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ (**geometrisches** und **arithmetisches Mittel)**
3. $F \cdot G \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit **Gleichheit genau dann, wenn** $F^p = G^q$.

6.4 Hölder- und Minkowski-Ungleichungen: Für zwei **messbare positive** numerische Funktionen $f, g : X \to [0;\infty]$ auf einem Maßraum $(X;\mathcal{A},\mu)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bzw. $p + q = p \cdot q$ gilt

1. $\int (f \cdot g)\, d\mu \leq (\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int g^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$ (**Hölder** bzw. **Schwarz** für $p = q = 2$)
   mit Gleichheit genau dann, wenn μ-fast überall gilt $\frac{f^p(x)}{\int f^p d\mu} = \frac{g^q(x)}{\int g^q d\mu}$
2. $(\int (f+g)^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int g^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ (**Minkowski**)
   mit Gleichheit genau dann, wenn μ-fast überall gilt $\frac{f^p(x)}{\int f^p d\mu} = \frac{g^p(x)}{\int g^p d\mu} = \frac{(f(x)+g(x))^p}{\int (f+g)^p d\mu}$

Beweis: Die Messbarkeit der Integranden ergibt sich aus 4.5. Verschwindet eines der Integrale, so verschwinden nach 5.7.1 auch μ-fast überall die Integranden $f \cdot g, f + g, f$ und g, so dass sich in jedem Fall Gleichheit ergibt. Im folgenden können also alle Integrale > 0 angenommen werden.

1. Mit $F(x) := f(x) \cdot (\int f^p d\mu)^{-\frac{1}{p}}$ und $G(x) := g(x) \cdot (\int g^q d\mu)^{-\frac{1}{q}}$ folgt durch Einsetzen in 6.3.3 und Integration auf beiden Seiten $\int (F \cdot G)\, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und damit Ungleichung 1. Insbesondere folgt aus der Integrierbarkeit von f^p und g^q die Integrierbarkeit von $f \cdot g$.
2. Durch zweimalige Anwendung von 1. auf $(f+g)^p = f \cdot (f+g)^{p-1} + g \cdot (f+g)^{p-1}$ erhält man $\int (f+g)^p\, d\mu \leq (\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int (f+g)^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + (\int g^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int (f+g)^{q(p-1)}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left((\int f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int g^q d\mu)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot (\int (f+g)^p\, d\mu)^{\frac{1}{q}}$ wegen $q(p-1) = p$. Die Behauptung ergibt sich nun wegen $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Aus der Konvexität von t^p erhält man die Abschätzung $\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{f^p+g^p}{2}$, d.h. aus der Integrierbarkeit von f^p und g^p folgt die Integrierbarkeit von $(f+g)^p$.

6.5 L^p-Räume: Für $1 \leq p \leq \infty$ wird durch $\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ für $p < \infty$ und $\|f\|_\infty := \inf\{0 < \alpha < \infty : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0\}$ mit 4.1 und wegen 6.4.2 sowie $(\int |\alpha f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\, \forall \alpha \in \mathbb{C}$ eine **Halbnorm** auf dem **Vektorraum** $\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{f : (X;\mathcal{A};\mu) \to \left(\overline{\mathbb{C}};\overline{\mathcal{B}};\lambda\right) : \|f\|_p :< \infty\right\}$ definiert. $\mathcal{L}^1(\mu)$ enthält die **integrierbaren** und $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ die μ-fast überall **beschränkten** messbaren Funktionen mit der **Supremumsnorm** $\|\|_\infty$. Durch den Übergang zum Quotientenraum $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p/\sim$ mit der **Äquivalenzrelation** $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$ wird $\|\|_p$ nach 5.7.1 zu einer **Norm**. Wegen $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\left\{|f| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ und wieder 5.7.1 gilt $\mu(\{f = \infty\}) = 0 \forall f \in \mathcal{L}^p, 1 \leq p \leq \infty$. Da also in jeder Äquivalenzklasse Vertreter mit ausschließlich endlichen Funktionswerten auftreten, kann man sich bei der Betrachtung integrierbarer Funktionen auf die Wertebereich $\mathbb{C}$ beschränken. Alle folgenden Betrachtungen beziehen sich auf **Äquivalenzklassen** messbarer Funktionen $f : (X;\mathcal{A};\mu) \to \left(\overline{\mathbb{C}};\overline{\mathcal{B}};\lambda\right)$ auf einem Maßraum $(X;\mathcal{A};\mu)$.

6.6 Beziehungen zwischen L^p-Räumen: Für $1 \leq p, q \leq \infty$ gilt

1. Ist das Maß μ nach oben beschränkt, d.h., $\mu(A) < \alpha \forall A \in \mathcal{A}$, so gilt $p < q \Rightarrow L^p \supset L^q$.
2. Ist das Maß μ nach unten beschränkt, d.h., $\mu(A) > \alpha \forall A \in \mathcal{A}$, so gilt $p < q \Rightarrow L^p \subset L^q$.

Bemerkung: Für $\mu = \lambda^n$ ist keine der beiden Bedingungen erfüllt, so dass die Räume $L^p(\lambda^n)$ durch die Inklusion nicht linear geordnet werden. Z.B. gilt nach 5.9.2 einerseits für $g_n(x) := \min\{1; |x|^{-n}\}$ die Zuordnung $g_n \in L^p \Leftrightarrow n > \frac{1}{p}$ und andererseits für $h_n(x) := \max\{1; |x|^{-n}\}$ die Zuordnung $g_n \in L^p \Leftrightarrow n < \frac{1}{p}$.

Beweis:

1. Mit $p = \frac{r}{s} \geq 1$, $f = h^s$ und $g = 1$ erhält man aus 6.4.1 $\int |h|^s d\mu \leq \left(\int |h|^r d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int 1 d\mu\right)^{\frac{s-s}{r}}$ bzw. $\|h\|_s = \left(\int |h|^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int |h|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} = \|h\|_r \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}$ und damit die Behauptung.
2. Nach dem **Lemma von Zorn** (siehe z.B. [6, Satz 14.2.4]) besitzt die Menge $\{|f| \geq 1\}$ eine bezüglich Inklusion maximale Überdeckung durch messbare Mengen und da $\mathcal{A}$ durchschnittsstabil ist, handelt es sich um eine Partition. Wegen $\int |f|^p d\mu < \infty$ ist auch $\mu(\{f \geq 1\}) < \infty$ und infolge der Beschränktheit nach unten des Maßes μ besteht die maximale Partition aus höchstens $n := \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \mu(\{f \geq 1\})\right] + 1$ Mengen $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $\mu(A) > \alpha$. Nach Definition 5.3 gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine Elementarfunktion $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \leq f$ mit $\int_{\{|f| \geq 1\}} e d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \geq \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^p d\mu - \epsilon \cdot \alpha$. Daraus folgt einerseits $\forall x \in A_i, 1 \leq i \leq n : |f|^p(x) \geq \alpha_i \Leftrightarrow |f|^q(x) \geq \alpha_i^{\frac{q}{p}}$ und andererseits $\exists x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n : \alpha_i \geq |f^p(x_i)| - \epsilon \Leftrightarrow \alpha_i^{\frac{q}{p}} \geq (|f^p(x_i)| - \epsilon)^{\frac{q}{p}} \geq |f^q(xxi)| - \epsilon \cdot \frac{q}{p} \cdot (|f^p(x_i)| - \epsilon)^{\frac{q}{p}-1} \geq |f^q(x_i)| - \epsilon \cdot \frac{q}{p} \cdot |f^{q-p}(x_i)|$, denn für die konvexe Potenzfunktion $g(x) = x^{\frac{q}{p}}$ liegt die Tangente $t(x+\epsilon) = x^{\frac{q}{p}} + \epsilon \cdot \frac{q}{p} \cdot x^{\frac{q}{p}-1}$ immer unterhalb der Kurve $g(x+\epsilon) = (x+\epsilon)^{\frac{q}{p}}$. Damit folgt zunächst $\int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^q d\mu < \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{\frac{q}{p}} + \epsilon \cdot \frac{q}{p} \cdot |f^{q-p}(x_i)|\right) \chi_{A_i} < \infty$ und insgesamt auch $\int |f|^q d\mu = \int_{\{|f|<1\}} |f|^q d\mu + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^q d\mu \leq \int_{\{|f|<1\}} |f|^p d\mu + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^q d\mu < \infty$.

6.7 Vollständigkeit: Für $1 \leq p \leq \infty$ konvergiert jede auf das p-te Mittel bezogene **Cauchy-Folge** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ im p-ten Mittel gegen ein $f \in L^p(\mu)$ und besitzt außerdem eine **Teilfolge** $\left(f_{n(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die **$\mu$-fast überall** gegen f konvergiert. Damit ist $L^p(\mu)$ ein **Banach-Raum**.

Beweis: Sei zunächst $p < \infty$. Für eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ existiert eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^{i+1}}$, so dass wegen 6.4.2 gilt $\left\|\sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|\right\|_p \leq 1$ und nach 5.5 auch $\left\|\sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|\right\|_p \leq 1$, also nach 5.7.1 insbesondere **μ-fast überall** $g := \sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| < \infty$.

Beachte, dass in 5.5 die **Vollständigkeit von** $\mathbb{R}$ genutzt wird. Die komplexwertige Folge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{i} (f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$ konvergiert daher **absolut** und **μ-fast überall** gegen ein μ-fast überall beschränktes $f = \lim_{i\to\infty} f_{n_i} = \sum_{i=0}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ mit $|f| < g$. Wegen der Vollständigkeit des Maßes μ und 3.9 kann ansonsten $f(x) = 0$ gesetzt werden. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\left\|f_m - f_{n_j}\right\|_p < \epsilon \forall m \geq n_j$ und nach 5.6 folgt $\left\|f - f_{n_j}\right\|_p \leq \liminf_{m \geq n_j} \left\|f_m - f_{n_j}\right\|_p < \epsilon^p$, d.h. die Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und damit auch die gesamte Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vgl. z.B. [7, Satz 13.1.2]) konvergiert im p-ten Mittel gegen f. Wegen $\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p < \infty$ gilt $f \subset L^p(\mu)$.

Für $p = \infty$ sei $A := \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} (\{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\} \cup \{|f_m| > \|f_m\|_\infty\})$. Dann gilt $\mu(A) = 0$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auf $X \setminus A$ bezüglich **Supremumsnorm** eine Cauchy-Folge, die wegen der **Vollständigkeit von** $\mathbb{C}$ auf dieser Menge **gleichmäßig und insbesondere bezüglich** $\|\|_\infty$ gegen eine beschränkte Funktion $|f| < \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$ konvergiert. Wenn wieder $f(x) = 0$ für $x \in A$ gesetzt wird, gilt $f \subset L^\infty(\mu)$.

Bemerkung: Wie man an der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\lambda)$ mit $f_n := \chi_{A_n}$ und $A_n := \left[\frac{n}{2^k}; \frac{n+1}{2^k}\right]$ mit $k(n) = \min\left\{k : n < 2^k\right\}$ sieht, kann die Aussage der **μ-fast überall** Konvergenz i.A. **nicht auf die**

ganze Folge übertragen werden: $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lambda\left(\left[\frac{n}{2^k};\frac{n+1}{2^k}\right]\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \lim\limits_{n\to\infty}2^{-\frac{k(n)}{p}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}} = 0$, aber es gibt für jedes $x\in[0;1]$ und jedes $k\geq 1$ ein $n\in\mathbb{N}$ mit $x\in\left[\frac{n}{2^k};\frac{n+1}{2^k}\right]$, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $x\in[0;1]$ konvergiert, die Teilfolge $(f_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ hingegen konvergiert für alle $x\neq 0$.

6.8 Elementarfunktionen: Die Algebra der komplexwertigen Elementarfunktionen $\mathcal{E}(X) = \left\{\sum_{0\leq i\leq m}\alpha_i\chi_{A_i} : m\in\mathbb{N},\ \alpha_i\in\mathbb{C},\ A_i\in\mathcal{A}\right\}$ liegt für $1\leq p\leq\infty$ dicht bezüglich $\|\|_p$ in $L^p(\mu)$. (vgl. 4.8)

Beweis: Im Fall $1\leq p<\infty$ gibt es nach 4.10 für jedes positives reelle $f\in L^p(\mu)$ bzw. $f^p\in L^1(\mu)$ eine aufsteigende Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}(X)$ von positiven, reellen Elementarfunktionen mit μ-fast überall $\lim\limits_{n\to\infty}(f-e_n)^p = \lim\limits_{n\to\infty}(f-e_n) = 0$ und der Majorante f^p für alle $(f-e_n)^p\in L^1(\mu)$, so dass nach 5.8 gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\|e_n^p - f^p\|_p = 0$. Im Fall $p=\infty$ ist für jedes positive reelle $f\in L^\infty(\mu)$ die Folge $(s_n\circ f)_{n\geq 0}$ von Elementarfunktionen **gleichmäßg** konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty}\|s_n\circ f - f\|_\infty = 0$, da n_0 nicht mehr von x abhängig ist. Der Übergang zu komplexwertigen Funktionen ergibt sich wie in 5.12.

6.9 $L^2(\mu)$ ist nach 6.7 ein **Hilbert-Raum** mit dem **inneren Produkt** $\langle f,g\rangle := \int f\overline{g}d\mu$ und der Norm $\|f\| := \langle f,g\rangle^{\frac{1}{2}} := \left(\int f\overline{f}d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$.

6.10 Konvergenz im p-ten Mittel und im Maß μ: Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 1}\subset L^p(\mu)$ für ein $p\in[1;\infty[$ **im p-ten Mittel** gegen ein $f\in L^p(\mu)$, so konvergiert sie auch **im Maß** μ gegen f.

Beweis: Für $\epsilon>0$ gibt es nach Vor. ein $n_0\geq 1$, so dass für alle $n\geq n_0$ gilt $\|f_n - f\|_p < \epsilon^{1+\frac{1}{p}} \Rightarrow$ $\mu(|f_n-f|>\epsilon) = \mu(|f_n-f|^p>\epsilon^p) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\int_{\{|f_n-f|^p>\epsilon^p\}}|f_n-f|^p d\mu \leq \frac{1}{\epsilon^p}\int|f_n-f|^p d\mu < \frac{1}{\epsilon^p}\epsilon^{p+1} = \epsilon$.

6.11 Lemma: Für ein **integrierbares** $f:(X;\mathcal{A};\mu)\to\left(\overline{\mathbb{C}};\overline{\mathcal{B}};\lambda\right)$ und jedes $\epsilon>0$ existiert ein $\delta>0$, so dass für alle $E\in\mathcal{A}$ mit $\mu(E)<\delta$ gilt $\int_E|f|d\mu<\epsilon$.

Beweis: Die Folge $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ mit $\varphi_n(x) = \begin{cases}|f(x)|, & \text{falls } |f(x)|\leq n\\ n & \text{sonst}\end{cases}$ erfüllt die Voraussetzungen für 5.5, so dass $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n d\mu = \int|f|d\mu$. Für $\epsilon>0$ existiert also ein $n_0\geq 1$, so dass $\int(|f|-\varphi_n)d\mu = \int|f|d\mu - \int\varphi_n d\mu < \frac{\epsilon}{2}$ und für $\delta = \frac{\epsilon}{2n}$ und jedes $E\in\mathcal{A}$ mit $\mu(E)<\delta$ gilt $\int_E\varphi_n d\mu \leq n\cdot\mu(E) = \frac{\epsilon}{2}$, so dass $\int_E|f|d\mu \leq \int_E(|f|-\varphi_n)d\mu + \int_E\varphi_n d\mu \leq \epsilon$.

6.12 Konvergenz im p-ten Mittel und μ-fast überall (Vitali): Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 1}\subset L^p(\mu)$ für ein $p\in[1;\infty[$ **μ-fast überall** gegen ein **μ-fast überall endliches**, **messbares** f, so konvergiert sie **genau dann** auch **im p-ten Mittel** gegen f und es gilt $f\in L^p(\mu)$, **wenn** für jedes $\epsilon>0$

1. ein $A_\epsilon\in\mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A_\epsilon)<\infty$ und $\int_{X\setminus A_\epsilon}|f_n|^p d\mu<\epsilon$ für alle $n\geq 1$.
2. ein $\delta>0$ existiert , so dass für alle $E\in\mathcal{A}$ mit $\mu(E)<\delta$ gilt $\int_E|f_n|^p d\mu<\epsilon$ für alle $n\geq 1$.

Beweis:

$\Rightarrow$: Für $\epsilon>0$ existiert nach 1. ein $A_\epsilon\in\mathcal{A}$ mit $\mu(A_\epsilon)<\infty$, so dass $\int_{X\setminus A_\epsilon}|f_n|^p d\mu<\epsilon$ für alle $n\geq 1$ und nach 5.6 gilt $\int_{X\setminus A_\epsilon}|f|^p d\mu \leq \liminf\limits_{n\geq 1}\int_{X\setminus A_\epsilon}|f_n|^p d\mu < \epsilon$. Mit 6.4.2 folgt $\left(\int_{X\setminus A_\epsilon}|f-f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{X\setminus A_\epsilon}|f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X\setminus A_\epsilon}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon^{\frac{1}{p}}$. Nach 2. und 4.12 gibt es für $\delta>0$ ein $B_\delta\in\mathcal{A}$ und ein $n_0\geq 1$ mit $\mu(B_\delta)<\delta$, so dass $|f-f_n|^p < \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon\setminus B_\delta)}$ und damit $\left(\int_{A_\epsilon\setminus B_\delta}|f-f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}}$ nach 5.8 für alle $n\geq n_0$. Wieder nach 5.6 ist $\int_{B_\delta}|f|^p d\mu \leq \liminf\limits_{n\geq 1}\int_{B_\delta}|f_n|^p d\mu < \epsilon$ und nach 6.4.2 folgt $\left(\int_{B_\delta}|f-f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{B_\delta}|f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\delta}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon^{\frac{1}{p}}$. Insgesamt erhält man also $(\int_X|f-f_n|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon^{\frac{1}{p}}$ und damit die Konvergenz im p-ten Mittel gegen $f = (f-f_n)+f_n\in L^p(\mu)$.

$\Leftarrow$: Zu 1.: Für $\epsilon>0$ gibt es nach Voraussetzung ein $n_0\geq 1$ mit $\int_X|f_n-f|^p d\mu<\epsilon$ für alle $n\geq n_0$. Weiter gibt es nach 5.4 ein o.B.d.A. $m_0\geq 1$ mit $\int|f|^p\cdot\chi_{\{|f|^p\leq\frac{1}{m}\}}d\mu = \int|f|^p d\mu - \int|f|\cdot\chi^p_{\{|f|^p>\frac{1}{m}\}}d\mu<\epsilon$ und $\mu\left(\left\{|f|^p\leq\frac{1}{m}\right\}\right)\leq m\cdot\int|f|^p d\mu<\infty$ für alle $m\geq m_0$.

Für die f_n mit $1 \leq n \leq n_0$ lässt sich analog ein $m_1 \geq m_0$ finden, so dass für die Mengen $B_\epsilon = \left\{|f|^p > \frac{1}{m_1}\right\} \in \mathcal{A}$ bzw. $C_\epsilon = \left\{\min_{1 \leq n < n_0} |f_n|^p > \frac{1}{m_1}\right\} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus B_\epsilon), \mu(X \setminus C_\epsilon) < \infty$ gilt $\int_{X \setminus B_\epsilon} |f|^p \, d\mu < \epsilon$ bzw. $\int_{X \setminus C_\epsilon} |f_n|^p \, d\mu < \epsilon$ für alle $1 \leq n < n_0$. Für $A_\epsilon = B_\epsilon \cup C_\epsilon$ gilt mit 6.4.2 die Abschätzung $\left(\int_{X \setminus A_\epsilon} |f_n|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{X \setminus A_\epsilon} |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X \setminus A_\epsilon} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}} + \epsilon^{\frac{1}{p}}$ zunächst für alle $n \geq n_0$ und nach dem vorigen Satz auch für $1 \leq n < n_0$. Damit gilt $\int_{X \setminus A_\epsilon} |f_n|^p \, d\mu < 2^p \epsilon$ für alle $n \geq 1$.
Zu 2.: Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $n_0 \geq 1$ wie in 1. so gewählt, dass $\int_X |f_n - f|^p \, d\mu < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Nach 6.11 existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt $\int_E |f|^p \, d\mu < \epsilon$ bzw. $\int_E |f_n|^p \, d\mu < \epsilon$ für alle $1 \leq n < n_0$. Mit 6.4.2 erhält man wie in 1. auch für $n \geq n_0$ die gewünschte Abschätzung $\int_E |f_n|^p \, d\mu < 2^p \epsilon$.

7 Produkträume

7.1 Initiale σ-Algebra : Die **initial**e **σ-Algebra** $\sigma(f_i : i \in I) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$ auf einer Menge X bezüglich der Funktionen $f_i : X \to (Y_i; \mathcal{A}_i)$ mit $i \in I$ ist die kleinste σ-Algebra auf X, für die alle f_i **messbar** sind. (vgl. mit der **Initialtopologie** z.B. in [7, Def 4.1]).

7.2 Spur eines Maßraumes: Die **Spur-σ-Algebra** $\mathcal{A}_B = \sigma(i)$ aus 1.3 auf der Teilmenge $B \subset X$ eines Maßraumes $(X; \mathcal{A}; \mu)$ ist die initiale σ-Algebra bezüglich der **kanonischen Injektion** $i : B \to X$. Wegen $i^{-1}[A] = A \cap B$ sind die messbaren Mengen in B einfach die **Schnitte der messbaren Mengen** A in X mit B. Die Spur des Maßes μ ist seine **Restriktion** $\mu|_B$.

7.3 Produkt-σ-Algebra : Die **Produkt-σ-Algebra** $\mathcal{A}_I = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \sigma(\pi_i : i \in I)$ auf dem Produkt $X_I = \prod_{i \in I} X_i$ der Messräume $(X_i; \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist die initiale σ-Algebra bezüglich der **Projektionen** $\pi_i : X_I \to X_i$. Eine Abbildung $f : Y \to X_I$ ist genau dann messbar, wenn die Urbilder $f^{-1}\left[\pi_i^{-1}[A_i]\right] = (\pi_i \circ f)^{-1}[A_i]$ von messbaren Mengen in X_i messbar in $(Y; \mathcal{A})$ sind. f ist also genau dann messbar, wenn alle **Komponenten** $\pi_i \circ f : (Y; \mathcal{A}) \to (X_i; \mathcal{A}_i)$ messbar sind. Nach 4.3 gilt für das Produkt der von den Familien $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ mit $i \in I$ erzeugten σ-Algebren $\bigotimes_{i \in I} \sigma(\mathcal{E}_i) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_i))\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma\left(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right)$.

7.4 Messbare Rechtecke und Zylindermengen:

1. Die Familie $\mathcal{S}_I = \left\{\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}[A_j] = \prod_{j \in J} A_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i : A_j \in \mathcal{A}_j,\ j \in J \subset I \land J \,\text{endlich}\right\}$ der **messbaren Rechtecke** ist ein **durchschnittstabiler Erzeuger** der Produkt-σ-Algebra: $\mathcal{A}_I = \sigma(\mathcal{S}_I)$.
2. Für $J \subset K \subset I$ sind die **Projektionen** $\pi_K^J : (X_J; \mathcal{A}_J) \to (X_K; \mathcal{A}_K)$ messbar und für $J \cap K = \emptyset$ gilt $\mathcal{A}_{J \cup K} = \mathcal{A}_J \otimes \mathcal{A}_K$.
3. Die Familie $\mathcal{Z}_I = \left\{\pi_J^{-1}[A_J] = A_J \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i : A_J \in \mathcal{A}_J, J \subset I \land J \,\text{endlich}\right\}$ der **Zylindermengen** ist eine **Algebra** und erzeugt ebenfalls die Produkt-σ-Algebra: $\mathcal{A}_I = \sigma(\mathcal{Z}_I)$. Für **endliche** $J \subset I$ sind die **J-Zylindermengen** $\mathcal{Z}_J = \mathcal{A}_J = \sigma(\mathcal{S}_J)$ selbst schon **σ-Algebren** mit $\mathcal{Z}_J \subset \mathcal{Z}_K$ für $J \subset K$.
4. Die Familie $\mathcal{A}_Z = \left\{\pi_J^{-1}[A_J] = A_J \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i : A_J \in \mathcal{A}_J, J \subset I \land J \,\text{abzählbar}\right\}$ der **abzählbaren Zylindermengen** ist eine **σ-Algebra** und **identisch** mit der Produkt-σ-Algebra: $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_Z$. Jede messbare Menge A einer Produkt-σ-Algebra hängt also nur von **abzählbar** vielen Koordinaten ab im Gegensatz zur **Produktopologie** (vgl. z.B. [7, Satz 4.2]), deren offene Mengen nur von **endlich** vielen Koordinaten abhängen

Beweis:

1. $\mathcal{S}_I$ ist **durchschnittstabil**, denn für endliche $J, K \subset I$ und $A_j \in \mathcal{A}_j$ für $j \in J$ bzw. $B_k \in \mathcal{A}_k$ für $k \in K$ ist $\left(\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}[A_j]\right) \cap \left(\bigcap_{k \in K} \pi_k^{-1}[B_k]\right) = \left(\bigcap_{j \in J \setminus K} \pi_j^{-1}[A_j]\right) \cap \left(\bigcap_{l \in J \cap K} \pi_l^{-1}[A_l \cap B_l]\right) \cap$

$\left(\bigcap_{k\in K\setminus J}\pi_k^{-1}[B_k]\right)\in\mathcal{S}_i$, da auch $A_l\cap B_l\in\mathcal{A}_l$ für $l\in J\cap K$. Wegen $\left\{\pi_i^{-1}[A_i]:\ A_i\in\mathcal{A}_i,\ i\in I\right\}\subset\sigma(\mathcal{S}_I)$ gilt $\mathcal{A}_I=\sigma\left(\left\{\pi_i^{-1}[A_i]:\ A_i\in\mathcal{A}_i,\ i\in I\right\}\right)\subset\sigma(\mathcal{S}_I)$ und wegen $\mathcal{S}_I\subset\mathcal{A}_I$ folgt umgekehrt $\sigma(\mathcal{S}_I)\subset\mathcal{A}_I$.

2. Die Messbarkeit der Projektionen folgt aus 1., denn für $\bigcap_{k\in K}\left(\pi_k^K\right)^{-1}[A_k]\in\mathcal{S}_K$ mit $A_k\in\mathcal{A}_k$ für $k\in K$ ist $\left(\pi_K^J\right)^{-1}\left(\bigcap_{k\in K}\left(\pi_k^K\right)^{-1}[A_k]\right)=\bigcap_{k\in K}\left(\pi_K^J\right)^{-1}\left(\left(\pi_k^K\right)^{-1}[A_k]\right)=\bigcap_{k\in K}\left(\pi_k^J\right)^{-1}[A_k]\in\mathcal{A}_J$ und $\mathcal{A}_K=\sigma(\mathcal{S}_K)$. Aus der Messbarkeit von $\pi_J^{J\cup K}$ bzw. $\pi_K^{J\cup K}$ folgt $\mathcal{A}_{J\cup K}\supset\mathcal{A}_J\otimes\mathcal{A}_K$ und wegen 1. sowie $\mathcal{S}_{J\cup K}\subset\mathcal{A}_J\otimes\mathcal{A}_K$ gilt auch die Umkehrung $\mathcal{A}_{J\cup K}=\sigma(\mathcal{S}J\cup K)\subset\mathcal{A}_J\otimes\mathcal{A}_K$.

3. $\mathcal{Z}_I$ ist eine **Algebra**, denn offensichtlich gilt $\emptyset,X\in\mathcal{A}_Z$ und für $\pi_J^{-1}[A_J],\pi_K^{-1}[A_K]\in\mathcal{Z}_I$ mit $A_J\in\mathcal{A}_J,B_K\in\mathcal{A}_K$ für endliche $J,K\subset I$ liegt auch der **Durchschnitt** $\left(\pi_J^{-1}[A_J]\right)\cap\left(\pi_K^{-1}[B_K]\right)=\pi_{J\cup K}^{-1}\left(\left(\left(\pi_J^{J\cup K}\right)^{-1}[A_J]\right)\cap\left(\pi_K^{J\cup K}\right)^{-1}[B_K]\right)$ wieder in $\mathcal{Z}_I$ und ebenso die **Vereinigung**, denn nach 2. sind $\left(\pi_J^{J\cup K}\right)^{-1}[A_J],\left(\pi_K^{J\cup K}\right)^{-1}[B_K]\in\mathcal{A}_{J\cup K}$. Mit z.B. [6, Satz 9.2.3] erhält man für das **Komplement** $X_I\setminus\pi_J^{-1}[A_J]=\left(\pi_J^{-1}[X_J]\right)\setminus\left(\pi_J^{-1}[A_J]\right)=\pi_J^{-1}[X_J\setminus A_J]\in\mathcal{Z}_I$, denn $X_J\setminus A_J\in\mathcal{A}_J$. Einerseits ist $\sigma(\mathcal{Z}_I)\subset\mathcal{A}_I$, denn wegen 2. gilt $\mathcal{Z}_I\subset\mathcal{A}_I$. Mit 1. folgt andererseits $\mathcal{A}_I=\sigma(\mathcal{S}_I)\subset\sigma(\mathcal{Z}_I)$ wegen $\mathcal{S}_I\subset\mathcal{Z}_I$. Für endliche $J\subset I$ sind die $\mathcal{Z}_J=\pi_J^{-1}(\mathcal{A}_J)$ offensichtlich σ-Algebren und die lineare Ordnung durch Inklusion folgt aus 2. wegen $\left(\pi_J^K\right)^{-1}(\mathcal{A}_J)\subset\mathcal{A}_K$ durch Anwendung von π_K^{-1} auf beiden Seiten.

4. Die Familie $\mathcal{A}_Z$ der abzählbaren Zylindermengen ist zunächst eine **Algebra**, da sich Beweis von 3. unverändert auf abzählbare Indexmengen übertragen lässt. Sie ist auch eine **σ-Algebra**, denn $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\pi_{J_n}^{-1}[A_{J_n}]=\pi_J^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\left(\pi_{J_n}^J\right)^{-1}[A_{J_n}]\right)\right)\in\mathcal{A}_Z$ mit $\left(\pi_{J_n}^J\right)^{-1}[A_{J_n}]\in\mathcal{A}_J$ und wieder abzählbarem $J=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}J_n$. Insbesondere folgt damit $\mathcal{A}_Z\subset\sigma(\mathcal{Z}_I)=\mathcal{A}_I$. Umgekehrt folgt aus $\mathcal{A}_Z\supset\mathcal{Z}_I$ nach 3. die Inklusion $\mathcal{A}_Z\supset\sigma(\mathcal{Z}_I)=\mathcal{A}_I$.

7.5 Produkt Borelscher σ-Algebren: Das **Produkt** $\mathcal{B}_I=\bigotimes_{i\in I}\sigma(\mathcal{O}_i)$ **der Borelschen σ-Algebren** $\mathcal{B}_i$ der topologischen Räume $(X_i;\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ist die kleinste σ-Algebra, für die alle Projektionen $\pi_i:X_I\to(X_i\mathcal{B}_i)$ **messbar** sind. Bezüglich der **Produkttopologie** $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i$ (vgl. [7, Satz 4.2]) sind die π_i **stetig** und daher wegen 4.3 bezüglich der von ihr erzeugten σ-Algebra $\sigma\left(\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i\right)$ auch **messbar**, so dass $\mathcal{B}_I\subset\sigma\left(\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i\right)$**.** Ist die Indexmenge I **abzählbar** und erfüllen die $\mathcal{O}_i$ das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, so gilt sogar **Gleichheit**: $\mathcal{B}_I=\sigma\left(\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i\right)$**.** Sei nämlich $\mathcal{E}_i$ eine **abzählbare Basis** für $\mathcal{O}_i$ und $\mathcal{E}=\left\{\pi_i^{-1}(E_i):\ E_i\in\mathcal{E}_i,\ i\in I\right\}$, so gilt $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i\subset\sigma(\mathcal{E})$ und da außerdem nach Definition der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}\subset\mathcal{B}_I$, folgt $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i\subset\sigma(\mathcal{E})\subset\mathcal{B}_I$ und damit $\sigma\left(\bigotimes_{i\in I}\mathcal{O}_i\right)\subset\mathcal{B}_I$. Sind alle Komponenten **hausdorffsch**, so überträgt sich T_2 nach z.B. [7, Satz 7.10] auf den Produktraum und nach dem **Satz von Tychonoff** (vgl. [7, Satz 9.9]) ist jedes **Produkt kompakter Mengen** wieder kompakt und damit Borel-messbar.

7.6 Endliche Produkt-σ-Algebren: Wenn jeder Erzeuger $\mathcal{E}_j$ für $1\le j\le m$ eine **abzählbare Überdeckung** $(E_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}_j$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_{jn}=X_j$ enthält, wird das **Produkt** $\bigotimes_{j=1}^m\sigma(\mathcal{E}_j)$ schon durch die Durchschnitte $\bigcap_{j=1}^m\pi_j^{-1}[E_j]=\prod_{j=1}^m E_j$ mit $E_j\in\mathcal{E}_j$ erzeugt: $\bigotimes_{j=1}^m\sigma(\mathcal{E}_j)=\sigma\left(\prod_{j=1}^m\mathcal{E}_i\right)$, denn $\sigma\left(\prod_{j=1}^m\mathcal{E}_i\right)\subset\bigotimes_{j=1}^m\sigma(\mathcal{E}_j)$ gilt in jedem Fall und aus 4.1 sowie $\pi_i^{-1}[E_i]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\prod_{j=1}^m\pi_j^{-1}[E_{jn}]\cap\pi_i^{-1}[E_i]\right)\in\sigma\left(\left\{\bigcap_{j=1}^m\pi_j^{-1}[E_j]:E_j\in\mathcal{E}_j\right\}\right):=\sigma\left(\prod_{j=1}^m\mathcal{E}_i\right)$ folgt auch die Umkehrung.

7.7 Endliche Produkte Borelscher σ-Algebren: In $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$ sind die **n-dimensionalen Intervalle** $\mathcal{I}^n:=\left\{\prod_{i=1}^n[a_i;b_i[:\ a_i\le b_i\in\mathbb{R}\right\}$ als **G_δ-Mengen** messbar. Ihre **endlichen Vereinigungen** bilden den **Ring** $\mathcal{F}^n$ der **n-dimensionalen Figuren** (vgl. [1, Satz 4.2]) und **erzeugen** wegen

$\prod_{i=1}^{n}]a_i;b_i[= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^{n} \left[a_i+\frac{1}{k};b_i\right[$ wieder die Borelsche σ-Algebra: $\mathcal{B}^n := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n)$ (Vgl. 1.3). Damit und wegen 1.1.2 wird die Borelsche σ-Algebra auch von Produkten $\prod_{i=1}^{n}]a_i;\infty[$ erzeugt. Die **Einpunktkompaktifizierungen** $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ und insbesondere $\overline{\mathbb{C}}$ tragen nach 2.1 die Borelschen σ-Algebren $\overline{\mathcal{B}^n} = \{A; A\cup\{\infty\} : A \in \mathcal{B}^n\}$, die dementsprechend von den Produkten $\prod_{i=1}^{n}]a_i;\infty]$ erzeugt werden.

8 Produktmaße

8.1 Lemma: Für zwei Maßräume $(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)$ mit $i\in\{1;2\}$ sind für jedes $A\subset \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ und $x_1\in X_1, x_2\in X_2$ die **Schnitte** $A_{x_1} := \{x_2\in X_2 : (x_1;x_2)\in A\}$ bzw. A_{x_2} messbar bezüglich $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$.

Beweis: Wegen $(X\setminus Q)_{x_1} = X_2 \setminus Q_{x_1}$ und $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right)_{x_1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_n)_{x_1}$ ist $\{Q\subset X_1\times X_2 : Q_{x_1}\in\mathcal{A}_2\}$ eine σ-Algebra, welches wegen $(A_1\times A_2)_{x_1} = \left\{\begin{smallmatrix} A_2, & x_1\in A_1 \\ \emptyset, & x_1\notin A_1\end{smallmatrix}\right.$ alle Mengen $A_1\times A_2$ mit $A_1\in\mathcal{A}_1$ bzw. $A_2\in\mathcal{A}_2$ enthält und damit auch die nach 7.4.3 von diesem Mengen erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$.

8.2 Definition: Ein Maß μ heißt **σ-endlich** auf dem Maßraum $(X;\mathcal{A};\mu)$, wenn es eine Überdeckung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$ aus μ-endlichen Mengen A_n gibt: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty \forall n\in\mathbb{N}$.

8.3 Lemma: Für zwei **σ-endliche** Maßräume $(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)$ für $i\in\{1;2\}$ sind die Abbildungen $s_{1A} : X_2\to[0;\infty]$ mit $s_{1A}(x_2) = \mu_1(A_{x_2})$ bzw. $s_{2A} : X_1\to[0;\infty]$ mit $s_{2A}(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$ für jedes $A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ messbar.

Beweis: Wir betrachten zunächst nur s_{1nA} mit $s_{1nA}(x_2) = \mu_1|_{A_n}(A_{x_2})$ für die Restriktion $\mu_1|_{A_n}$ auf eine der μ_1-endlichen Mengen A_{1n} mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{1n} = X_1$. Die Familie $\mathcal{D}$ aller Teilmengen $D\subset X_1\times X_2$, für die s_{1nD} messbar ist, bildet ein Dynkin-System, denn die konstante Funktion $s_{1n\emptyset} = 0$ ist messbar; mit s_{1nA} ist auch $s_{1n(X_1\times X_2)\setminus A}(x_2) = \mu_1|_{A_n}\left(((X_1\times X_2)\setminus A)_{x_2}\right) = \mu_1|_{A_n}\left((X_1\times X_2)_{x_2}\setminus A_{x_2}\right) = \mu_1|_{A_n}\left((X_1\times X_2)_{x_2}\right) - \mu_1|_{A_n}(A_{x_2}) = \mu_1|_{A_n}(X_1) - s_{1nA}(x_2)$ messbar und mit $(s_{1nD_m})_{m\in\mathbb{N}}$ für paarweise disjunkten Mengen $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist auch $s_{1n\mathring{U}D_m} = \sum_{m\in\mathbb{N}} s_{1nD_m}$ nach 4.8 messbar. Für alle $A_1\times A_2$ mit $A_1\in\mathcal{A}_1$ bzw. $A_2\in\mathcal{A}_2$ ist $s_{1n(A_1\times A_2)}(x_2) = \mu_1|_{A_n}\left((A_1\times A_2)_{x_2}\right) = \mu_1|_{A_n}(A_1)\cdot\chi_{A_2}(x_2)$ messbar. Das System $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ dieser Mengen ist also in $\mathcal{D}$ enthalten und außerdem durchschnittsstabil, womit nach 1.5.3 auch die von diesen Mengen gemäß 7.4.3 erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ in $\mathcal{D}$ liegt. Da jedes s_{1nA} messbar ist, gilt dies nach 2.2.4 und 4.9 auch für $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_{1nA}(x_2) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_1|_{A_n}(A_{x_2}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_n\cap A_{x_2}) = \mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\cap A_{x_2}\right) = \mu_1(A_{x_2}) = s_{1A}(x_2)$. Der Beweis für s_{2A} läuft analog.

8.4 Produktmaß: Auf dem Produkt $(X_1\times X_2;\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)$ zweier **σ-endlicher** Maßräume $(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)$ mit $i\in\{1;2\}$ wird durch $(\mu_1\otimes\mu_2)(A) := \int \mu_1(A_{x_2})\,d\mu_2 = \int \mu_2(A_{x_1})\,d\mu_1$ für $A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ ein **σ-endliches** Maß definiert, welches durch die **Multiplikativität** $(\mu_1\otimes\mu_2)(A_1\times A_2) = \mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)$ für alle $A_1\times A_2\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ schon eindeutig bestimmt ist.

Beweis: $\mu_1\otimes\mu_2$ ist auf dem durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ wegen $\mu_1\left((A_1\times A_2)_{x_2}\right) = \mu_1(A_1)\cdot\chi_{A_2}(x_2)$ und umgekehrt wohldefiniert und durch die Forderung der Multiplikativität eindeutig bestimmt, woraus nach 3.4 die **Eindeutigkeit** und Gleichheit der beiden Integraldarstellungen auf ganz $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$ folgt. $\mu_1\otimes\mu_2$ ist **σ-additiv**, denn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ paarweise disjunkter Mengen gilt wegen der σ-Additivität 2.2 von μ_1 und der monotonen Konvergenz 5.5 bezogen auf μ_2 die Gleichung $(\mu_1\otimes\mu_2)\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \int \mu_1\left(\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)_{x_2}\right) d\mu_2 = \int\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_n)_{x_2}\right) d\mu_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \mu_1(A_{x_2})\,d\mu_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu_1\otimes\mu_2)(A_n)$. $\mu_1\otimes\mu_2$ ist **σ-endlich**, denn für die Überdeckungen $(A_{in})_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}_i$ aus μ_i-endlichen Mengen A_{in} ist $(A_{1n}\times A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ eine Überdeckung von $X_1\times X_2$ aus $\mu_1\otimes\mu_2$-endlichen Mengen $A_{1n}\times A_{2n}$.

8.5 Satz von Fubini: Für zwei **σ-endliche** Maßräume $(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)$ mit $i\in\{1;2\}$ und jede **positive numerische**, $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$-messbare Funktion $f : X_1\times X_2\to\overline{\mathbb{R}}_+$sind die Abbildungen $x_1\mapsto f_{x_2}(x_1) =$

$f(x_1;x_2)$ bzw. $x_2 \mapsto f_{x_1}(x_2) = f(x_1;x_2)$ sowie $x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2$ bzw. $x_2 \mapsto \int f_{x_2} d\mu_1$ **messbar** bezüglich $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ und für das Integral auf dem Produktraum gilt $\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_{x_1} d\mu_2\right) d\mu_1 = \int \left(\int f_{x_2} d\mu_1\right) d\mu_2$.

Beweis: $x_1 \mapsto f_{x_2}(x_1)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar, denn für $A \in \overline{\mathcal{B}}_+$ ist $f_{x_2}^{-1}[A] = \{(\xi_1;x_2) : f(\xi_1;x_2) \in A\} = \left(f^{-1}[A]\right)_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ wegen 8.1. Für **Elementarfunktionen** $f = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}(X_1 \times X_2)$ mit $A_i \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist $x_1 \mapsto \int f_{x_1} d\mu_2 = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \int (\chi_{A_i})_{x_1} d\mu_2 = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \int \chi_{(A_i)_{x_1}} d\mu_2 = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \mu_2 \left((A_i)_{x_1}\right)$ messbar bezüglich $\mathcal{A}_1$ wegen 8.3 und damit berechnet sich $\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_i) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \left(\int \mu_2 \left((A_i)_{x_1}\right) d\mu_1\right) = \int \left(\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \mu_2 \left((A_i)_{x_1}\right)\right) d\mu_1 = \int \left(\int f_{x_1} d\mu_2\right) d\mu_1$ wegen 8.4. Für positive, numerische, messbare Funktionen folgt die Behauptung nun mit Hilfe von 4.9 und 5.5.

8.6 Endliche Produkte von Maßräumen: Auf dem endlichen Produkt $\left(\prod_{i \in J} X_i; \bigotimes_{i \in j} \mathcal{A}_i\right)$ der Maßräume $(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)$ mit endlicher Indexmenge J konstruiert man **induktiv** gemäß $\bigotimes_{1 \le j < i} \mu_j := \left(\bigotimes_{1 \le j < i} \mu_j\right) \otimes \mu_i$ das durch die **Multiplikativität** $\mu\left(\prod_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mu_i(A_i)$ **eindeutig bestimmte Produktmaß** $\bigotimes_{i \in J} \mu_i$ nach 8.4 und schreibt für das Produkt der Maßräume $\bigotimes_{i \in j}(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i) := \left(\prod_{i \in J} X_i; \bigotimes_{i \in j} \mathcal{A}_i; \bigotimes_{i \in J} \mu_i\right)$.

8.7 Integral für komplexwertige Funktionen auf endlichen Produkträumen: Für eine komplexwertige, Borel-messbare Funktion $f : \prod_{i \in J} X_i \to \overline{\mathbb{C}}$ auf dem Produkt $\bigotimes_{i \in J}(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)$ mit $\mu := \bigotimes_{i \in J} \mu_i$ für $J = \{1,...,n\}$ nach 8.6 wird gemäß $\int f d\mu := \int (\mathrm{Re} f)^+ d\mu - \int \left(-(\mathrm{Re} f)^-\right) d\mu + i \int (\mathrm{Im} f)^+ d\mu - i \int \left(-(\mathrm{Im} f)^-\right) d\mu$ ein Integral definiert, falls die vier nach 8.5 unabhängig von der Permutation $j : J \to J$ **induktiv** konstruierten Integrale $\int (\mathrm{Re} f)^+ d\mu := \int \left(... \left(\int (\mathrm{Re} f)^+ d\mu_{j(1)}\right) ...\right) d\mu_{j(n)}$ und entsprechend $\int \left(-(\mathrm{Re} f)^-\right) d\mu$, $\int \left(-(\mathbf{Im} f)^-\right) d\mu$ **sowie** $\int \left(-(\mathbf{Im} f)^-\right) d\mu$ **endlich** sind. f heißt in diesem Fall wieder **integrierbar** und ist nach 5.7.1 μ-fast überall endlich.

8.8 Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$: Das Lebesgue-Maß $\lambda^n := \bigotimes_{1 \le i \le n} \lambda$ auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ des $\mathbb{R}^n$ ist **translationsinvariant** und durch diese Eigenschaft auf dem **durchschnittsstabilen** Erzeugendensystem der **n-dimensionalen Intervalle** $\mathcal{I}^n$ nach 3.4, 7.5 und 8.4 schon eindeutig bestimmt: Für jede Translation $T_{\mathbf{c}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ für $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ gilt für jedes Intervall $[\mathbf{a};\mathbf{b}[:= \prod_{i=1}^{n} [a_i;b_i[\in \mathcal{I}^n$ mit $a_i \le b_i \in \mathbb{R}$ die Identität $T_{\mathbf{c}}(\lambda^n)([\mathbf{a};\mathbf{b}[) = \lambda^n\left(T_{\mathbf{c}}^{-1}([\mathbf{a};\mathbf{b}[)\right) = \lambda^n([\mathbf{a}-\mathbf{c};\mathbf{b}-\mathbf{c}[) = \lambda^n([\mathbf{a};\mathbf{b}[) = \prod_{i=1}^{n} [b_i - a_i[$, d.h. die σ-endlichen Maße $T_{\mathbf{c}}(\lambda^n)$ und λ^n stimmen auf dem durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{I}^n$ überein und nach 3.4 damit auch auf $\sigma(\mathcal{I}^n) = \mathcal{B}^n$. Hierbei wird der Eindeutigkeitssatz 3.4 sowohl für den Nachweis der Translationsinvarianz selbst als auch für Eindeutigkeit eines Maßes mit dieser Eigenschaft herangezogen.

8.9 Bildmaß von λ^n unter Homomorphismen: Das **Volumen** des durch die drei Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ aufgespannten Spates wird durch die **Determinante** $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ der aus den entsprechenden Spaltenvektoren gebildeten Matrix gegeben. Dieses Ergebnis lässt sich mit dem Lebesgue-Borelschen Maß λ^n bestätigen und verallgemeinern: Für das Bild von λ^n unter einem **Homomorphismus** $T \in GL(n;\mathbb{R})$ gilt $T(\lambda^n) = \frac{\lambda^n}{\det T}$, denn jeder Homomorphismus bzw. jede **invertierbare** Matrix ist nach z.B. [4, 2.6.3 Satz A] das Produkt von Elementarumformungen bzw.-Matrizen der zwei folgenden Typen:

Die Multiplikation der k-ten Zeile mit dem Faktor $\alpha \in \mathbb{R}$ durch Multiplikation mit der **Elementarmatrix** $E_{k\alpha}$ (siehe rechts) bewirkt eine **Streckung** der Menge der Punkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{a} = (a_1;...;a_k;...;a_n)^T$ um α in Richtung des **Basisvektors** $\mathbf{e}_k$: $E_{k\alpha} * \mathbf{a} = (a_1;...;\alpha a_k;...;a_n)^T$. Der von den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ aufgespannte **Einheitswürfel** $Q := [\mathbf{0};\mathbf{1}[$ mit dem Lebesgue Maß $\lambda^n(Q) = (1-0)^n = 1$ erhält dann das Bildmaß $E_{k\alpha}(\lambda^n)(Q) =$

$$\begin{array}{cc} 1 \;\cdots\; k \;\cdots\; n & \\ E_{k\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array}$$

$\lambda^n\left(E_{k\alpha}^{-1}(Q)\right) = \lambda^n\left(E_{k\frac{1}{\alpha}}(Q)\right) = (1-0)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}-0\right) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\det E_{k\alpha}}\cdot\lambda^n(Q)$.

Die Addition der l-ten Zeile zur k-ten Zeile durch Multiplikation mit der Elementarmatrix E_{kl} (siehe rechts) bewirkt eine **Scherung** der Figur, denn die Hyperebene $\{x\in\mathbb{R}^n : x_l = a_l\}$ senkrecht zu $\mathbf{e}_l$ wird um a_l in Richtung $\mathbf{e}_k$ verschoben: Das Bild der Ortsvektoren $\mathbf{a} = (a_1;...;a_k;...;a_l;...;a_n)^T$ ist

$$E_{kl} * \mathbf{a} = (a_1;...;a_k+a_l;...;a_l;...;a_n)^T$$

(siehe rechts).
Die Umkehrung ist die Rückverschiebung E_{kl}^{-1} mit

$$E_{kl}^{-1} * \mathbf{a} = (a_1;...;a_k-a_l;...;a_l;...;a_n)^T$$

$$E_{kl} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \\ n \end{array}$$

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } n=3$$

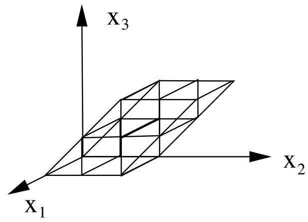
Um das Bildmaß $E_{kl}(\lambda^n)(Q)$ zu bestimmen, zerlegt man Q nach dem **Prinzip von Cavalieri** in m disjunkte Schichten

$$L_{kjm} = [0;1[_1\times ...\times[0;1[_k\times...\times\left[\frac{j-1}{m};\frac{j}{m}\right[_l\times...\times[0;1[_n$$

der Dicke $\frac{1}{m}$ und mit Maß

$$\lambda^n(L_{kjm}) = (1-0)^{n-1}\cdot\left(\frac{j}{m}-\frac{j-1}{m}\right) = \frac{1}{m}$$

senkrecht zu $\mathbf{e}_l$.



$E_{23}(Q_3)$

Die rückverschobene Schicht $E_{kl}^{-1}(L_{kjm})$ in Form eines Hyperprismas lässt sich **von innen** durch den n-dimensionalen Quader

$$K\left(E_{kl}^{-1}(L_{kjm})\right) = [0;1[_1\times...\times[0-\frac{j-1}{m};1-\frac{j}{m}[_k\times...\times\left[\frac{j-1}{m};\frac{j}{m}\right[_l\times...\times[0;1[_n\subset E_{kl}^{-1}(L_{kjm})$$

mit $\lambda^n\left(K\left(E_{kl}^{-1}(L_{kjm})\right)\right) = \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)$ annähern. Wegen der σ-Additivität und der Stetigkeit **von unten** gemäß 2.2.4 erhält man

$E_{kl}(\lambda^n)(Q) = \lambda^n\left(E_{kl}^{-1}(L_{kjm})\right) = \lambda^n\left(\bigcup_{m\geq 1}\mathring{\bigcup}_{j=1}^{m} K\left(E_{kl}^{-1}(L_{kjm})\right)\right) = \sup_{m\geq 1}\lambda^n\left(\mathring{\bigcup}_{j=1}^{m} K\left(E_{kl}^{-1}(L_{kjm})\right)\right) = \sup_{m\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\lambda^n\left(K\left(E_{kl}^{-1}(L_{kjm})\right)\right) = \sup_{m\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right) = 1 = \frac{1}{\det E_{kl}}\cdot\lambda^n(Q)$. Die Behauptung ergibt sich nun aus der **Multiplikativität der Determinante:** $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$**.**

8.10 Nicht messbare Mengen: Wie in 1.4 und 7.4.4 gezeigt, sind Borelsche σ-Algebren viel größer als die sie erzeugenden Topologien, enthalten aber trotzdem **nicht alle Teilmengen**: Aus jeder der disjunkten, jeweil in $\mathbb{R}$ dicht liegenden Äquivalenzklasse des Quotientenraums $\mathbb{R}\mathrm{mod}\mathbb{Q} = \mathbb{R}/\sim$ mit $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$ lässt sich nach dem Auswahlaxiom (vgl. z.B. [6, Satz 14.2.1]) genau ein Vertreter $x\in[0;1[$ auswählen. Für die Menge K dieser Vertreter gilt wegen 8.8 einerseits $\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\mathring{\bigcup}_{x\in K}\{x+y : y\in\mathbb{Q}\}\right) = \lambda\left(\mathring{\bigcup}_{y\in\mathbb{Q}}\{x+y : x\in K\}\right) = \lambda\left(\mathring{\bigcup}_{y\in\mathbb{Q}}K\right) = \sum_{y\in\mathbb{Q}}\lambda(K)$ und daher $\lambda(K)>0$. Andererseits ist $2 = \lambda([0;2[) = \lambda\left(\mathring{\bigcup}_{y\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}\{x+y : x\in K\}\right) = \lambda\left(\mathring{\bigcup}_{y\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}K\right) = \sum_{y\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}\lambda(K)$ und damit $\lambda(K)=0$. K kann also nicht Borel-messbar sein.

8.11 Maße auf unendlichen Produkträumen: Auf dem Produkt $(X_I;\mathcal{A}_I)$ der **Wahrscheinlichkeitsräume** $(X_i;\mathcal{A}_i;\mu_i)_{i\in I}$ mit beliebiger Indexmenge I existiert genau ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** μ_I mit $\pi_J(\mu) = \mu_J := \bigotimes_{i\in J}\mu_i$ für alle **endlichen** $J\subset I$. Die Elemente $x_I\in X_I$ mit $x_I : I\to X_I$

heißen in diesem Zusammenhang auch **Pfade** oder **Realisierungen** des **stochastischen Prozesses** $(X_I; \mathcal{A}_I; \mu_I)$

Beweis: Durch $\mu_I : \mathcal{Z}_I \to [0;1]$ mit $\mu_I(Z) := \mu_J(A_J)$ für $Z = \pi_J^{-1}(A_J)$ und $A_J \in \mathcal{A}_J$ wird auf der **Algebra** $\mathcal{Z}_I$ der **Zylindermengen** ein **Inhalt** definiert. Zunächst ist $\mu_I$wohldefiniert und unabhängig von der Darstellung der Zylindermenge $Z = \pi_J^{-1}(A_J) = \pi_K^{-1}(B_K)$ mit $A_J \in \mathcal{A}_J$ und $B_K \in \mathcal{A}_K$ für endliche $J, K \subset I$. Dazu sei zunächst $Z = \prod_{l\in L} Z_l = \left(\pi_J^L\right)^{-1}\left(\prod_{j\in J} A_j\right) = \left(\pi_K^L\right)^{-1}\left(\prod_{k\in K} B_k\right) \in \mathcal{S}_L$ mit $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j \in J$ und $B_k \in \mathcal{A}_k$, $k \in K$ für endliche $J, K, L \subset I$ mit $J \cup K \subset L$ ein **messbares Rechteck**, für welches in diesem Fall $Z_j = A_j = B_j$ für $j \in J \cap K$, $Z_j = A_j = X_j$ für $j \in J \setminus K$, $Z_j = B_j = X_j$ für $j \in K \setminus J$ und schließlich $Z_l = X_l$ für $l \in L \setminus (J \cup K)$ folgt. Nach 8.6 sowie wegen $\mu_i(X_i) = 1$ für alle $i \in I$ gilt dann $\mu_L(Z) = \mu_J\left(\prod_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J\cap K} \mu_j(A_j) = \prod_{j\in J\cap K} \mu_j(B_j) = \mu_K\left(\prod_{k\in K} B_k\right)$ und nach 3.4 lässt sich diese Veträglichkeitsbedingung bzw. Eindeutigkeit auf die **σ-Algebra $\mathcal{Z}_L = \sigma(\mathcal{S}_L)$ der Zylindermengen für ein endliches** $L \subset I$ (beachte 7.4.3) übertragen. μ_I ist damit auf der **Algebra $\mathcal{Z}_I$ aller endlicher Zylindermengen** auf $\mathcal{Z}_I$ wohldefiniert. Die Additivität folgt direkt aus 8.6.

Zum Nachweis der **σ-Additivität** verwenden wir nach 2.2.6 die **Stetigkeit von oben**. Dazu betrachtet man nach 7.4.3 für **K-Zylindermengen** $Z \in \mathcal{Z}_K$ und $x_J \in X_J$ mit endlichen $J \subset K \subset I$ die **Z-Fortsetzungen** $Z^{x_J} = \left\{\xi_I \in X_I : \left(x_J; \pi_{I\setminus J}(\xi_I)\right) \in Z\right\} = \pi_{K\setminus J}^{-1}(A_{x_J}) \in \mathcal{Z}_K$ für $A \in \mathcal{A}_K = \mathcal{A}_J \otimes \mathcal{A}_{K\setminus J}$ mit $Z = \pi_K^{-1}(A)$ und dem Schnitt $A_{x_J} \in \mathcal{A}_{K\setminus J}$ wegen 7.4.2 und 8.1. Anschaulich betrachtet besteht Z^{x_J} aus allen **Pfaden** ξ_I, die im **Zeitabschnitt** $K \setminus J$ eine mögliche bzw. in Z liegende **Fortsetzung** $\pi_{I\setminus J}(\xi_I)$ des bereits durchlaufenen **Teilpfades** x_J darstellen. Nach 8.4 gilt $\mu_I(Z) = \mu_K(A) = \int \mu_{K\setminus J}(A_{x_J})\, d\mu_J = \int \mu_I(Z^{x_J})\, d\mu_J$.

Sei nun $(Z_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{Z}_I$ eine absteigende Folge von Zylindermengen $Z_n = \pi_{J_n}^{-1}(A_n)$ mit $A_n \in \mathcal{A}_{J_n}$für endliche $J_{n+1} \supset J_n$ (beachte 7.4.3) und $Z_{n+1} \subset Z_n$ sowie $\mu_I(Z_n) \geq \alpha > 0$ für $n \geq 1$. Die Abbildung $x_{J_1} \mapsto \mu_I\left(Z_n^{x_{J_1}}\right) = \pi_{J_n\setminus J_1}^{-1}\left((A_n)_{x_{J_1}}\right)$ ist wegen 8.3 messbar und damit folgt auch die $\mathcal{A}_{J_1}$-Messbarkeit der Menge $Q_n^{J_1} = \left(x_{J_1} \in X_{J_1} : \mu_I\left(Z_n^{x_{J_1}}\right) \geq \frac{\alpha}{2}\right) \in \mathcal{A}_{J_1}$ aller Pfade $x_{J_1} \in X_{J_1}$, die mit Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{\alpha}{2}$ auf Z_n fortgesetzt werden können. Nach 2. erhält man die Abschätzung $\alpha \leq \mu_I(Z_n) \leq \int_{Q_n^{J_1}} \mu_I\left(Z_n^{x_{J_1}}\right) d\mu_{J_1} + \int_{X_I\setminus Q_n^{J_1}} \mu_I\left(Z_n^{x_{J_1}}\right) d\mu_{J_1} \leq \mu_{J_1}\left(Q_n^{J_1}\right) + \frac{\alpha}{2}$, und damit $\mu_{J_1}\left(Q_n^{J_1}\right) \geq \frac{\alpha}{2}$ für alle $n \geq 1$. Da μ_{J_1} stetig von oben und $Q_{n+1}^{J_1} \subset Q_n^{J_1}$ für alle $n \geq 1$, gibt es ein $x_{J_1} \in \bigcap_{n\geq 1} Q_n^{J_1} \neq \emptyset$, d.h., $\mu_I\left(Z_n^{x_{J_1}}\right) \geq \frac{\alpha}{2}$ für alle $n \geq 1$. Der Pfad x_{J_1}wird nun induktiv fortgesetzt, wobei $Z_n^{x_{J_k}}$ an die Stelle von Z_n tritt: Angenommen, es gibt schon ein $x_{J_k} \in X_{J_k}$ mit $\mu_I\left(Z_n^{x_{J_k}}\right) \geq \frac{\alpha}{2^k}$ für alle $n \geq 1$, dann ist $Q_n^{J_{k+1}} = \left(x_{J_{k+1}\setminus J_k} \in X_{J_{k+1}\setminus J_k} : \mu_I\left(\left(Z_n^{x_{J_k}}\right)^{x_{J_{k+1}}\setminus x_{J_k}}\right) \geq \frac{\alpha}{2^{k+1}}\right) \in \mathcal{A}_{J_{k+1}}$ und damit $\frac{\alpha}{2^k} \leq \mu_I\left(Z_n^{x_{J_k}}\right) \leq \int_{Q_n^{J_{k+1}}} \mu_I\left(\left(Z_n^{x_{J_k}}\right)^{x_{J_{k+1}}\setminus x_{J_k}}\right) d\mu_{J_{k+1}} + \int_{X_I\setminus Q_n^{J_{k+1}}} \mu_I\left(\left(Z_n^{x_{J_k}}\right)^{x_{J_{k+1}}\setminus x_{J_k}}\right) d\mu_{J_{k+1}} \leq \mu_{J_{k+1}}\left(Q_n^{J_{k+1}}\right) + \frac{\alpha}{2^{k+1}}$, also $\mu_{J_1}\left(Q_n^{J_{k+1}}\right) \geq \frac{\alpha}{2^{k+1}}$ für alle $n \geq 1$, so dass ein $x_{J_{k+1}\setminus J_k} \in \bigcap_{n\geq 1} Q_n^{J_{k+1}} \neq \emptyset$ existiert, d.h., $\mu_I\left(\left(Z_n^{x_{J_k}}\right)^{x_{J_{k+1}}\setminus x_{J_k}}\right) \geq \frac{\alpha}{2^{k+1}}$ für alle $n \geq 1$. Setzt man nun das neue Pfadstück an zu $x_{J_{k+1}} := \left(x_{J_k}; x_{J_{k+1}\setminus J_k}\right) \in X_{J_{k+1}}$, so folgt $Z_n^{x_{J_{k+1}}} = \left(Z_n^{x_{J_k}}\right)^{x_{J_{k+1}}\setminus x_{J_k}}$, also insbesondere $\pi_{J_k}^{J_{k+1}}(x_{k+1}) = x_k$ und $\mu_I\left(Z_n^{x_{J_{k+1}}}\right) \geq \frac{\alpha}{2^{k+1}}$ für alle $n \geq 1$. Damit ist ein Teilpfad $x' = \left(x_{J_1}; x_{J_2\setminus J_1}; ...\right) \in \pi_{\bigcup_{n\geq 1} J_n}\left(\bigcap_{n\geq 1} Z_n\right) \subset X_{\bigcup_{n\geq 1} J_n}$ gefunden und durch beliebige Ergänzungen auf den restlichen Komponenten $I \setminus \bigcup_{n\geq 1} J_n$ erhält man das gesuchte $x \in \bigcap_{n\geq 1} Z_n \neq \emptyset$ mit $\pi_{\bigcup_{n\geq 1} J_n}(x) = x'$.

9 Wahrscheinlichkeitsmaße

9.1 Unabhängigkeit: Eine Familie $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ messbarer Mengen auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X; \mathcal{A}; \mu)$ heißt **unabhängig**, wenn für jede endliche Teilmenge $F \subset I$ gilt $\mu\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} \mu(A_i)$. Eine Familie $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ von Mengensystemen $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{A}$ für $i \in I$ heißt unabhängig, wenn die

Familien $\left(A_{i_f}\right)_{i_f\in F}$ für jede nichtleere, endliche Teilmenge $F \subset I$ und $A_{i_f} \in \mathcal{E}_{i_f}$ für $i_f \in F$ unabhängig sind. Für zwei **unabhängige** Mengensysteme $\mathcal{E}, \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(X;\mathcal{A};\mu)$ sind auch die von ihnen erzeugten **Dynkin-Systeme** $\delta(\mathcal{E})$ und $\delta(\mathcal{D})$ unabhängig, denn die Familie $\mathcal{I}(\mathcal{D}) := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A \cap D) = \mu(A) \cdot \mu(D)\, \forall D \in \mathcal{D}\}$ ist bereits ein Dynkin-System: Offensichtlich ist $X \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$ und für $A \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$ sowie $D \in \mathcal{D}$ gilt $\mu((X \setminus A) \cap D) = \mu(D \setminus (A \cap D)) = \mu(D) - \mu(A \cap D) = \mu(D) - \mu(A) \cdot \mu(D) = \mu(D) \cdot (1 - \mu(A)) = \mu(X \setminus A) \cdot \mu(D)$, so dass mit A auch $X \setminus A \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Für paarweise disjunkte $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}(\mathcal{D})$ gilt $\mu\left(\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap D\right) = \mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap D)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap D) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \cdot \mu(D) = \mu(D) \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(D) \cdot \mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ und damit auch $\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Wegen $\mathcal{E} \subset \mathcal{I}(\mathcal{D})$ folgt daher auch $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{D})$ und damit die Behauptung. Da sich auch die allgemeine Definition der Unabhängigkeit immer nur auf endliche Teilfamilien bezieht, kann diese Aussage auf **beliebige** unabhängige Familien $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ und die von ihnen erzeugten Dynkin-Systeme $(\delta(\mathcal{E}_i))_{i\in I}$ übertragen werden. Sind die $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ **durchschnittsstabil**, so überträgt sich die Unabhängigkeit nach 1.7.2. auch auf die **σ-Algebren** $(\sigma(\mathcal{E}_i))_{i\in I} = (\delta(\mathcal{E}_i))_{i\in I}$. Durch Anwendung dieser Aussage auf die von jeweils einer einzelnen Menge erzeugten σ-Algebren $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset; A; X \setminus A; X\}$ und $\sigma(\{B\})$ sieht man, dass sich die Unabhängigkeit von A und B auf die **Komplemente** überträgt.

9.2 Null - Eins - Gesetz von Borel: Für eine **unabhängige** Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ messbarer Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(X;\mathcal{A};\mu)$ gilt $\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \in \{0;1\}$.

Beweis: Für jedes $n \geq 1$ sind die σ-Algebren $\mathcal{T}_{n+1} = \sigma\left(\left\{\bigcap\limits_{m=0}^{j} A_{k_m} : k_m \geq n+1 \forall 0 \leq m \leq j \in \mathbb{N}\right\}\right)$ und $\mathcal{A}_n = \sigma\left(\left\{\bigcap\limits_{m=0}^{j} A_{k_m} : k_m \leq n \forall 0 \leq m \leq j \leq n\right\}\right)$ wegen 1.7.2 und 9.1 unabhängig. Außerdem ist $T = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$ und daher $\mathcal{A}_n \in \mathcal{I}(T) := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A \cap T) = \mu(A) \cdot \mu(T)\}$. Außerdem gilt $\mathcal{T}_n \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}_n$ für jedes $n \geq 1$. Da $\mathcal{I}(T)$ nach den Überlegungen im Beweis zu 9.1 ein Dynkin-System ist und mit der durchschnittsstabilen Familie $\mathcal{A}$ auch $\sigma(\mathcal{A}) = \delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{I}(T)$ enthält, folgt $T \in \mathcal{I}(T)$, d.h., T ist unabhängig von sich selbst und damit $\mu(T) = \mu(T \cap T) = \mu(T) \cdot \mu(T) \in \{0;1\}$.

9.3 Chebyshev-Ungleichung: Für jede positive numerische Funktion f auf einem **Wahrscheinlichkeitsraum** $(X;\mathcal{A};\mu)$ und jedes $\alpha > 0$ gilt $\alpha \cdot \mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \int f d\mu$.

Beweis: $\alpha \cdot \mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \int_{\{f\geq\alpha\}} f d\mu \leq \int f d\mu$.

9.4 Zufallsvariablen: Messbare Abbildungen $f : X \to Y$ auf Wahrscheinlichkeitsräumen $(X;\mathcal{A};\mu)$ werden oft als **Zufallsvariablen** bezeichnet. Das Integral $E(f) := \int f d\mu$ ist dann der **Erwartungswert** und das Bildmaß $\mu_f := f(\mu)$ gemäß 4.2 heißt **Verteilung** von f. Die Zufallsvariablen $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i : (X;\mathcal{A};\mu) \to (Y_i;\mathcal{A}_i)$ heißen **unabhängig**, wenn die nach 4.3 von ihnen erzeugten σ-Algebren $\left(f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)_{i\in I}$ mit $f_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{A}$ unabhängig sind, d.h., genau dann, wenn für alle $i, j \in I$ und $A_i \in \mathcal{A}_i, A_j \in \mathcal{A}_j$ gilt $\mu\left(f_i^{-1}[A_i] \cap f_j^{-1}[A_j]\right) = \mu_{f_i}(A_i) \cdot \mu_{f_j}(A_j)$. Für **reelle** Zufallsvariablen $f : X \to \mathbb{R}$ gilt wegen $0 \leq E\left((f - E(f))^2\right) = E(f^2) - (E(f))^2$ die Abschätzung $E(f^2) \geq (E(f))^2$. Ihre **Standardabweichung** $\sigma(f) := \|f - E(f)\|_2 = \sqrt{E(f^2) - (E(f))^2} = \sigma(f - E(f))$ ist unabhängig vom Erwartungswert, so dass man häufig auf die **zentrierte** Zufallsvariable $f - E(f)$übergeht.

9.5 Erwartungswerte von Produkten unabhängiger Zufallsvariablen: Integration und Multiplikation sind bei unabhängigen, reellen Zufallsvariablen $f, g \in L^1(\mu)$ vertauschbar: $E(f \cdot g) = E(f) \cdot E(g)$ und insbesondere ist auch $f \cdot g \in L^1(\mu)$.

Beweis: Die Behauptung gilt wegen $E(\chi_A \cdot \chi_B) = E(\chi_{A\cap B}) = \mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B) = E(\chi_A) \cdot E(\chi_B)$ für **Indikatorfunktionen** und wegen der **Linearität** des Integrals 5.1.1 auch für **Elementarfunktionen** $\varphi, \gamma \in \mathcal{E}(X)$. **Positive numerische**, **Borel-messbare Funktionen** $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, g = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n \in L^1(\mu)$ mit aufsteigenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ gemäß Satz 4.9 sind nach 5.7.1 μ-fast überall endlich, so dass auch das Produkt μ-fast überall endlich ist mit $f \cdot g = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \cdot g_n$ und nach

5.3 erhält man $E(f\cdot g)=\sup_{n\in\mathbb{N}}E(f_n\cdot g_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}(E(f_n)\cdot E(g_n))=\sup_{n\in\mathbb{N}}E(f_n)\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}}E(f_n)=E(f)\cdot E(g)$. Schließlich folgt aus der Linearität des Integrals auch für $f=f^+-f^-, g=g^+-g^-\in L^1(\mu)$ mit positiven f^+,f^-,g^+,g^- die Behauptung in der Form $E(f\cdot g)=E(f^+\cdot g^+-f^+\cdot g^--f^-\cdot g^++f^-\cdot g^-)=E(f^+)\cdot E(g^+)-E(f^+)\cdot E(g^-)-E(f^-)\cdot E(g^+)+E(f^-)\cdot E(g^-)=E(f)\cdot E(g)$.

9.6 Median: Die reelle Zahl $m(f)$ heißt **Median** der reellen Zufallsvariablen $f:X\to\mathbb{R}$, wenn $\mu(f\le m(f))\ge\frac{1}{2}\le\mu(f\le m(f))$. Wie man sich anhand von Elementarfunktionen leicht klar macht, ist für zwei Mediane $m_1(f)<m_2(f)$ auch jeder Zwischenwert $m_1(f)<\alpha<m_2(f)$ ein Median. Der **kleinste Median** ist $m_{min}(f)=\inf\left\{\lambda\in\mathbb{R}:\mu(f\le\lambda)\ge\frac{1}{2}\right\}=\inf\left\{\lambda\in\mathbb{R}:\mu(f>\lambda)\le\frac{1}{2}\right\}$, denn wegen 2.2.4 ist einerseits $\mu(f\le m_{min}(f))=\mu\left(\bigcap_{n\ge1}\left\{f\le m_{min}(f)+\frac{1}{n}\right\}\right)=\inf_{n\ge1}\mu\left(f\le m_{min}(f)+\frac{1}{n}\right)$ $\ge\frac{1}{2}$ und andererseits $\mu(f\ge m_{min}(f))=\mu\left(\bigcap_{n\ge1}\left\{f\ge m_{min}(f)-\frac{1}{n}\right\}\right)=\inf_{n\ge1}\mu\left(f\ge m_{min}(f)-\frac{1}{n}\right)$ $=1-\sup_{n\ge1}\mu\left(f<m_{min}(f)-\frac{1}{n}\right)\ge\frac{1}{2}$, aber für jedes $\epsilon>0$ ist $\mu(f\le m_{min}(f)-\epsilon)<\frac{1}{2}$. Entsprechend ist der **größte Median** $m_{max}(f)=\sup\left\{\lambda\in\mathbb{R}:\mu(f\ge\lambda)\ge\frac{1}{2}\right\}=\sup\left\{\lambda\in\mathbb{R}:\mu(f<\lambda)\le\frac{1}{2}\right\}$. Tatsächlich muss $m_{min}(f)\le m_{max}(f)$ gelten, denn im gegenteiligen Fall wäre $\sup_{n\ge1}\mu\left(f\ge m_{max}(f)+\frac{1}{n}\right)$ $=\mu\left(\bigcup_{n\ge1}\left\{f\ge m_{max}(f)+\frac{1}{n}\right\}\right)=\mu(f>m_{max}(f))>\frac{1}{2}$, d.h., es gäbe ein $\lambda=m_{max}(f)+\frac{1}{n}$ mit $\mu(f\ge\lambda)\ge\frac{1}{2}$ im Widerspruch zu Definition von $m_{max}(f)$. Offensichtlich gilt $c\cdot m(f)=m(c\cdot f)$ und $m(f)+x=m(f+c)$ für jede reelle Zahl $c\in\mathbb{R}$.

9.7 Ungleichungen von Lévy: Für **unabhängige, reelle Zufallsvariablen** $\{f_i, 1\le i\le n\}$ mit Summen $F_m:=\sum_{i=1}^{m}f_i$ und jedes $\epsilon>0$ gilt $\mu\left(\max_{1\le i\le n}|F_i+m(F_n-F_i)|\ge\epsilon\right)\le2\mu(|F_n|\ge\epsilon)$.

Beweis: Für $F_0:=0$ und $T=\min\{1\le i\le n+1:|F_i+m(F_n-F_i)|\ge\epsilon\vee i:=n+1\}$ sind die Mengen $A_i:=\{T=i\}\in\sigma(f_1,...,f_i)$ wegen $m(F_n-F_i)\in\mathbb{R}$ und daher **unabhängig** von $B_i=\{F_n-F_i\ge m(F_n-F_i)\}\in\sigma(f_i,...,f_n)$. Da außerdem $\mu(B_i)\ge\frac{1}{2}$, folgt $\mu(F_n\ge\epsilon)\ge\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_i\right)$ $=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\cdot\mu(B_i)\ge\frac{1}{2}\mu(1\le T\le n)=\frac{1}{2}\mu\left(\max_{1\le i\le n}F_i+m(F_n-F_i)\ge\epsilon\right)$. Die Übertragung auf den Betrag erhält man durch Anwendung der Abschätzung auf $-F_i$ mit $m(-F_n+F_i)=-m(F_n-F_i)$ und Addition der beiden Ungleichungen unter Beachtung der Additivität 2.1 des Maßes..

9.8 Konvergenzsatz von Lévy: Für Folge $(F_n)_{n\ge1}$der Summen $F_n:=\sum_{i=1}^{n}f_i$ **unabhängiger, reeller Zufallsvariablen** $(f_i)_{i\ge1}$ ist die μ **fast-sichere Konvergenz äquivalent zur stochastischen Konvergenz**.

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus dem Konvergenzsatz 4.11 von **Lebesgue**. Zu $\Leftarrow$ erhält man aus 4.13.1 für jedes $\frac{1}{4}>\epsilon>0$ ein $n_\epsilon\ge1$ mit $\mu(|F_n-F_m|\ge\epsilon)<\epsilon$ für alle $n>m\ge n_\epsilon$. Inbesondere ist dann $\mu(|F_n-F_m|\ge\epsilon)<\frac{1}{2}$ und daher $|m(F_n-F_m)|\le\epsilon$ für $n>m\ge n_\epsilon$. Mit 9.7 erhält man $\mu\left(\max_{m<i\le n}|F_i-F_m|\ge2\epsilon\right)\le2\mu(|F_n-F_m|\ge\epsilon)<2\epsilon$. Für $n\to\infty$ folgt $\mu\left(\sup_{m<i}|F_i-F_m|\ge2\epsilon\right)\le2\epsilon$ und mit 4.14 die Behauptung.

9.9 Partielle Summation (Abel):

1. Für zwei **reelle** Zahlenfolgen $(a_i)_{i\ge0},(b_i)_{i\ge0}\subset\mathbb{R}$ und $A_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$ gilt

   $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=A_nb_n-A_0b_1-\sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_{i+1}-b_i)$ für $n\ge1$.

2. Falls zusätzlich $\lim_{n\to\infty}A_n=A_0^*<\infty$ mit $A_n^*=\sum_{i>n}a_i$, so gilt

   $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=A_0^*b_1-A_n^*b_n+\sum_{i=1}^{n-1}A_i^*(b_{i+1}-b_i)$ für $n\ge1$.

3. Falls außerdem $a_i \geq 0$ und $b_{i+1} \geq b_i \geq 0$ für alle $i \geq 0$, so gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = A_0^* b_1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i^* (b_{i+1} - b_i)$ für $n \geq 1$.

Beweis:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (A_{i+1} - A_i) b_{i+1} = A_n b_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i (b_{i+1} - b_i) - A_0 b_1$.

2. Folgt aus 1. mit $a_0 = -\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = -A_0^*$.

3. Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^* b_n > 0$ folgt aus $\sum_{i>n} a_i b_i \geq A_n^* b_n$ sowie 2. direkt $A_0^* b_1 + \sum_{i\geq 1} A_i^* (b_{i+1} - b_i) \geq \sum_{i>1} a_i b_i = \infty$ und damit die Behauptung. Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^* b_n = 0$ folgt die Behauptung direkt aus 2. für $n \to \infty$.

9.10 Lemma von Kronecker: Für eine **aufsteigende** Folge $(b_i)_{i\geq 1}$ positiver reeller Zahlen $b_{i+1} \geq b_i > 0$ für $i \geq 1$ und $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{b_i} = 0$ und eine weitere reelle Zahlenfolge $(a_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{R}$ mit $\sum_{i\geq 1} \frac{a_i}{b_i} < \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$.

Beweis: Aus 9.6.2 folgt mit $c_i = \frac{a_i}{b_i}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C_0^* = \sum_{i\geq 1} \frac{a_i}{b_i} < \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^* = 0$ die Zerlegung $\frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i b_i = \frac{1}{b_n} C_0^* b_1 + C_n^* + \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} C_i^* (b_{i+1} - b_i)$. Für $n \to \infty$ streben die ersten beiden Summanden gegen Null. Aber auch der dritte Summand wird beliebig klein, denn für jedes $\epsilon > 0$ lässt sich ein $m \geq 1$ finden mit $|C_i^*| < \epsilon$ für alle $i \geq m$, so dass einerseits $\left| \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=m}^{n-1} C_i^* (b_{i+1} - b_i) \right| < \epsilon \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=m}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) = \epsilon \left(1 - \frac{b_m}{b_n}\right) < \epsilon$ und andererseits $\left| \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{m-1} C_i^* (b_{i+1} - b_i) \right| < \epsilon$ für ein genügend großes $n \geq 1$.

9.11 Konvergenz im quadratischen Mittel (Khintchin-Kolmogorov): Für jede Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ **unabhängiger**, **zentrierter Zufallsvariablen** $f_n \in L^2(\mu)$ mit $\sum_{n\geq 1} E(f_n^2) < \infty$ konvergieren die **Summen** $F_m := \sum\limits_{n=1}^{m} f_n$ **μ-fast überall und im quadratischen Mittel** gegen ein $F = \lim\limits_{m\to\infty} F_m \in L^2(\mu)$ mit $E(F)^2 = \sum_{n\geq 1} E(f_n^2)$.

Beweis: Nach 9.5 und wegen $E(f_n) = 0$ für alle n≥ 1 sowie aufgrund der Voraussetzung gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{m\geq k} E(F_m - F_k)^2 = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{m\geq k} \sum\limits_{i=k}^{m} E(f_i^2) = 0$ und nach 6.7 existiert ein $F = \lim\limits_{k\to\infty} F_{m(k)} \in L^2(\mu)$ mit einer **μ-fast überall konvergenten Teilfolge** $\left(F_{m(k)}\right)_{k\geq 1}$ sowie Konvergenz der Gesamtfolge im **quadratischen Mittel**: $\lim\limits_{m\to\infty} E(F - F_m)^2 = 0$. Nach 6.10 folgt daraus zunächst die **stochastische Konvergenz** und nach 9.8 ist dies äquivalent mit der **μ-fast sicheren Konvergenz** der gesamten Summenfolge. Wegen 10.5 und $E(f_n) = 0$ gilt außerdem $E(F)^2 = \lim\limits_{m\to\infty} E(F_m)^2 = \sum_{n\geq 1} E(f_n^2)$.

9.12 Das starke Gesetz der großen Zahlen (Kolmogorov): Für jede Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ **unabhängiger**, **identisch verteilter, integrierbarer Zufallsvariablen** konvergieren die **Mittelwerte** $\frac{1}{m} F_m := \frac{1}{m} \sum\limits_{n=1}^{m} f_n$ **μ-fast überall** gegen den gemeinsamen **Erwartungswert** $E(f_1) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m} F_m$.

Bemerkungen: Das starke Gesetz der großen Zahlen liefert eine mathematische Rechtfertigung des Lernens aus Erfahrung im täglichen Leben und aller **statistischen Verfahren** in der Wissenschaft: Aus den Mittwelwerten $\frac{1}{m} F_m$ der unter identischen Bedingungen und unabhängig voneinander durchgeführten Versuche in der **Vergangenheit** lässt sich auf den an Erfahrungswert $E(f_1)$ für die **Zukunft** schließen.

Beweis: Man zeigt die Behauptung zunächst für die **gestutzten Zufallsvariablen** $g_n = \frac{1}{n} \cdot f_n \cdot \chi_{\{|f_n|\leq n\}}$und zeigt dann, dass die Abweichungen zu f_n für $n \to \infty$ μ-fast überall verschwinden:

Für $A_m = \{m - 1 < |f_1| \leq m\}$ gilt die Abschätzung $\sum_{n\geq 1} E\left(|g_n|^2\right) = \sum_{n\geq 1} \sum_{n\geq m\geq 1} n^{-2} \int_{A_m} |f_1|^2 \, d\mu$ $= \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq m} n^{-2} \int_{A_m} |f_1|^2 \, d\mu \leq \sum_{m\geq 1} \frac{2}{m} \int_{A_m} |f_1|^2 \, d\mu \leq 2 \sum_{m\geq 1} \int_{A_m} |f_1| \, d\mu \leq 2E(|f_n|) < \infty$, so dass nach 9.11 folgt μ-fast sicher $\sum_{n\geq 1}(g_n - E(g_n)) < \infty$. Außerdem gilt $\sum_{n\geq 1}\mu\left(\frac{1}{n}f_n \neq g_n\right)$ $= \sum_{n\geq 1}\mu(|f_1| > n) \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq n}\mu(m+1 \geq |f_1| > m) \leq \sum_{m\geq 1}\sum_{m\geq n\geq 1}\mu(m+1 \geq |f_1| > m) =$ $\sum_{m\geq 1} m\cdot\mu(m+1\geq |f_1| > m) \leq E(|f_1|) < \infty$ und nach 4.12 gilt $\mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{\frac{1}{n}f_n \neq g_n\right\}\right) =$ 0 und damit μ-fast sicher auch $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(f_n - E(n\cdot g_n)) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\cdot f_n - E(g_n)\right) < \infty$. Wegen $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m} E(n\cdot g_n) = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m} E\left(f_1\cdot\chi_{\{|f_1|\leq n\}}\right) = \lim\limits_{m\to\infty} E\left(f_1\cdot\chi_{\{|f_1|\leq n\}}\right) = E(f_1)$ und 9.10 folgt $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}F_m - E(f_1) = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}(f_n - E(n\cdot g_n)) = 0$.

10 Maße mit Dichten

10.1 Komplexes Maß und totale Variation: Ein **komplexes Maß** ist eine komplexwertige, σ-additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ auf einem Messraum $(X;\mathcal{A})$. Die σ-Additivität $\mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$ beinhaltet aufgrund der **Vertauschbarkeit der Vereinigung** nach dem **Satz von Lévy und Steinitz** ([5, Satz 3.9]) die **absolute Konvergenz** und insbesondere die **Endlichkeit des komplexen Maßes**. Die in 3.1 definierte Maße $\mu : \mathcal{A} :\to [0;\infty]$ sind daher keine Teilmenge der komplexen Maße und werden im folgenden zur Abgrenzung als **positive Maße** bezeichnet.

Seine **totale Variation** $|\mu| : \mathcal{A} :\to \mathbb{R}$ mit $|\mu|(A) := \sup\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(A_n)| : A_n \in \mathcal{A} : \mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}A_n = A\right\}$ ist wieder σ-additiv und damit ein **Maß**, denn einerseits gibt es für jedes $A_m \in \mathcal{A}$ und $\epsilon > 0$ eine Partition $(A_{mn})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $|\mu|(A_m) - \epsilon\cdot 2^{-m-1} < \sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(A_{mn})| \leq |\mu|(A_m)$ und damit auch $\sum_{m\in\mathbb{N}}|\mu|(A_m) - \epsilon < \sum_{m,n\in\mathbb{N}}|\mu(A_{mn})| \leq \sum_{m\in\mathbb{N}}|\mu|(A_m)$ bzw. $\sum_{m\in\mathbb{N}}|\mu|(A_m) \leq |\mu|\left(\mathring{\bigcup}_{m\in\mathbb{N}}A_m\right)$. Andererseits ist für **jede** Partition $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}B_n = \mathring{\bigcup}_{m\in\mathbb{N}}A_m$ auch $(B_n\cap A_m)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Partition von A_m und damit $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\mu(B_n)| \leq \sum_{m,n\in\mathbb{N}}|\mu(A_m\cap B_n)| \leq \sum_{m\in\mathbb{N}}|\mu|(A_m)$, so dass auch für das Supremum über alle solche Partitionen gilt: $|\mu|\left(\mathring{\bigcup}_{m\in\mathbb{N}}A_m\right) \leq \sum_{m\in\mathbb{N}}|\mu|(A_m)$. $|\mu|$ ist also ebenfalls σ-additiv.

10.2 Lemma: Für je endliche viele komplexe Zahlen $z_1, ..., z_n$ gibt es eine Teilmenge $S \subset \{1;...;n\}$ mit $\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|$.

Beweis: Für $z_i = |z_i|\cdot e^{i\alpha_i}$ und $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ sei $S(\vartheta) := \{1 \leq k \leq n : \cos(\alpha_k - \vartheta) > 0\}$. Dann gilt für jedes dieser ϑ die Abschätzung $\left|\sum_{k\in S} z_k\right| = \left|\sum_{k\in S} e^{-i\vartheta}\cdot z_k\right| \geq \mathrm{Re}\left(\sum_{k\in S} e^{-i\vartheta}\cdot z_k\right) = \sum_{k\in S}|z_k|\cdot \cos(\alpha_k - \vartheta) \geq \frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|\cdot\cos^+(\alpha_k - \vartheta)$ und wenn das Maximum der rechten Summe bei ϑ_0 erreicht wird, so ist dieses Maximum mindestens so groß wie der Mittelwert $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|\cdot\cos^+(\alpha_k - \vartheta)\right)d\vartheta =$ $\frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|$und das Lemma ist mit $S := S(\vartheta_0)$ bewiesen.

10.3 Satz: Die totale Variation $|\mu|$ eines komplexen Maßes μ ist endlich: $|\mu|(X) < \infty$.

Beweis: Falls $|\mu|(X) = \infty$, gibt es eine Partition $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von X und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n}$ $|\mu(A_i)| > |\mu(X)|+1$. Nach 10.2 gibt es eine Teilmenge $S \subset \{1;...;n\}$, so dass für $B_1 := \bigcup_{k\in S} A_i$ einerseits gilt $|\mu(B_1)| = \left|\sum_{k\in S}\mu(A_i)\right| > |\mu(X)|+1 \geq 1$ und andererseits $|\mu(X\setminus B_1)| = |\mu(X) - \mu(B_1)| \geq |\mu(B_1)| - |\mu(X)| \geq 1$. Nach Annahme ist $|\mu|(B_1) = \infty$ oder $|\mu|(X\setminus B_1) = \infty$ und wenn dies o.B.d.A für $X\setminus B_1$ erfüllt ist, lässt sich wieder eine Teilmenge $B_2 \subset X\setminus B_1$ abspalten mit $|\mu|(X\setminus(B_1\cup B_2)) = \infty$ und $|\mu(B_2)| \geq 1$. Induktiv erhält man so eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Mengen B_n mit $|\mu(B_n)| \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ und folglich $\left|\mu\left(\mathring{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)\right|$ im Widerspruch zur Beschränktheit von μ gemäß Definition 10.1.

10.4 Stetige und singuläre Maße: Die Menge der komplexen Maße auf einem Messraum $(X;\mathcal{A})$ wird durch $(\lambda+\mu)(A) := \lambda(A) + \mu(A)$und $(c\cdot\lambda)(A) := c\cdot\lambda(A)$ für $A \in \mathcal{A}$, $c \in \mathbb{C}$ sowie $\|\lambda\| :=$

$|\lambda|(X)$ zu einem **normierten Vektorraum**. Ein komplexes oder positives Maß λ heißt **μ-stetig** in Bezug auf das positive Maß μ auf dem gleichen Messraum $(X, \mathcal{A})$ mit der Schreibweise $\lambda \lessdot \mu$, wenn $\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0 \,\forall A \in \mathcal{A}$. Das Maß λ heißt **konzentriert** auf die Menge $A \in \mathcal{A}$, wenn $\lambda(B) = \lambda(B \cap A) \,\forall B \in \mathcal{A}$ bzw. $\lambda(B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Es heißt **$\mu$-singulär** in der Schreibweise $\lambda \perp \mu$, wenn λ und μ auf zwei disjunkte Mengen konzentriert sind. Die beiden Verhältnisse haben die folgenden Eigenschaften:

1. Ist λ konzentriert auf A, so gilt dies auch für $|\lambda|$, denn für die Partition $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Menge $E \in \mathcal{A}$ mit $E \cap A = \emptyset$ gilt $\lambda(E_m) = 0 \,\forall m \in \mathbb{N}$.
2. $\lambda \perp \mu \Rightarrow |\lambda| \perp |\mu|$ wegen 1.
3. $\lambda \lessdot \mu \Rightarrow |\lambda| \lessdot \mu$, denn aus $\lambda(A) = 0$ folgt für jede Partition $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von A auch $\lambda(A_m) = 0 \,\forall m \in \mathbb{N}$.
4. $\lambda \perp \mu \wedge \lambda \lessdot \mu \Rightarrow \lambda = 0$ ist offensichtlich.
5. $\lambda_1 \perp \mu \wedge \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$, denn wenn λ_1, λ_2 und μ auf A_1, A_2 bzw. B mit $A_1 \cap B = A_2 \cap B = \emptyset$ konzentriert sind, dann ist $\lambda_1 + \lambda_2$ auf $A_1 \cup A_2$ konzentriert mit $(A_1 \cup A_2) \cap B = \emptyset$.
6. $\lambda_1 \lessdot \mu \wedge \lambda_2 \lessdot \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \lessdot \mu$ ist offensichtlich.
7. $\lambda_1 \perp \mu \wedge \lambda_2 \lessdot \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$, denn wenn λ_1 auf A konzentriert ist, gilt insbesondere $\lambda_1(A) \neq 0$ und damit $\lambda_2(A) = \mu(A) = 0$, d.h. λ_2 ist auf $X \setminus A$ konzentriert.

10.5 ϵ-δ-Definition der Stetigkeit: Ein komplexes Maß λ ist genau dann stetig in Bezug auf ein positives Maß μ auf dem gleichen Messraum $(X; \mathcal{A})$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt: $\mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \epsilon$.

Beweis:

$\Rightarrow$: Angenommen, es gibt für ein $\epsilon > 0$ eine Folgr $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < 2^{-n}$ aber $|\lambda(A_n)| \geq \epsilon$, dann ist $(B_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $B_m = \bigcup_{n\geq m} A_n$ eine absteigende Folge messbarer Mengen mit $\mu(B_m) < 2^{-m+1}$ und $\mu\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) = 0$ wegen 2.2.5. Andererseits ist auch das Maß $|\lambda|$ stetig von oben, so dass $|\lambda|\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) = \lim\limits_{m\to\infty} |\lambda|(B_m) \geq \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} |\lambda|(A_m) \geq \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} |\lambda(A_m)| \geq \epsilon$ im Widerspruch zur Annahme $|\lambda| \lessdot \mu$.

$\Leftarrow$: $\mu(A) = 0 \Rightarrow |\lambda(A)| < \epsilon \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$.

10.6 Jordan-Zerlegung signierter Maße: Real- und Imaginärteil komplexer Maße sind **beschränkt** und werden zur Abgrebzung von den positiven Maßen auch **signierte Maße** genannt. Ein signiertes Maß μ auf $(X; \mathcal{A})$ lässt sich wiederum durch ebenfalls beschränkte **positive und negative Variationen** $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ und $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ in der **Jordan-Zerlegung** darstellen als $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Die **totale Variation** eines positiven signierten Maßes stimmt nach 10.1 wegen der σ-Additivität mit dem Maß selbst überein: $|\mu^+| = \mu^+$ bzw. $|\mu^-| = \mu^-$.

10.7 Satz von Lebesgue Radon-Nikodym: Für ein positives, σ-endliches Maß μ und eine komplexes Maß λ auf einem Messraum $(X; \mathcal{A})$ existieren

1. eine eindeutige **Lebesgue-Zerlegung** von λ bezüglich μ in zwei komplexe Maße λ_a und λ_s mit $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, so dass $\lambda_a \lessdot \mu$ und $\lambda_s \perp \mu$
2. eine eindeutige **Radon-Nikodym-Dichte** oder **Ableitung** $h \in L^1(\mu)$ mit $\lambda_a(A) = \int_A h \, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Die **Eindeutigkeit** der Lebesgue-Zerlegung folgt aus 7.4, denn für eine weitere Zerlegung λ'_a und λ'_s gilt $\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s$ und nach 10.4.4 bzw. 10.4.5 $\lambda'_a - \lambda_a \lessdot \mu$ bzw. $\lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$, woraus wegen 10.4.3 folgt $\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s = 0$. Die Eindeutigkeit der Radon-Nikodym-Dichte folgt direkt aus Satz 5.7.3 bzw. Definition 5.10.

Zur **Konstruktion** der Zerlegung definiere zunächst $w : X \to]0; 1[$ durch $w(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi_{A_n}}{2^n \cdot (1+\mu(A_n))}$ für eine abzählbare Überdeckung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von X mit $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$, so dass das Maß $wd\mu$ mit $wd\mu(A) := \int_A w \, d\mu$ endlich ist und wegen $w > 0$ genau die gleichen Nullmengen besitzt wie μ. Gemäß 10.4 ist dann $d\varphi = d|\lambda| + w d\mu$ wieder ein positives beschränktes Maß mit $\int f\, d\varphi = \int f\, d|\lambda| + \int f w\, d\mu$ für alle Elementarfunktionen und damit nach 5.4 für alle positiven messbaren Funktionen f. Insbesondere gilt für $f \in L^2(\varphi)$ wegen 10.4.1 und der Endlichkeit von φ die Abschätzung $|\int f\, d|\lambda|| \leq \int |f|\, d\lambda \leq \int |f|\, d\varphi \leq \left(\int |f|^2\, d|\lambda| \leq\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varphi(X))^{\frac{1}{2}} < \infty$. Die Abbildung $\Lambda : L^2(\varphi) \to [0; \infty[$ mit $\Lambda(f) = \int f\, d|\lambda|$ ist also ein beschränktes lineares Funktional und besitzt nach z.B. [10, p 308 Th 12.5] einen φ-fast überall eindeutig bestimmten Repräsentanten $g \in L^2(\varphi)$ bezüglich des inneren Produkts mit $\int f\, d|\lambda| = \Lambda(f) = \langle f, g\rangle = \int f g\, d\varphi$. Mit $f = \chi_A$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(A) > 0$ erhält man $0 \leq \int_A g\, d\varphi = |\lambda|(A) \leq \varphi(A)$ und daher $0 \leq g(x) \leq 1$ für φ-fast alle $x \in X$. Damit ist insbesondere $1 - g \geq 0$ und unter Verwendung der Definition von φ erhält man die Gleichung (X): $\int (1-g) f\, d|\lambda| = \int f g w\, d\mu$. Die **Lebesgue-Zerlegung** der totalen Variation $|\lambda| = \lambda_a + \lambda_s$ wird nun durch $\lambda_a(A) = |\lambda|(A \cap \{g < 1\})$ und $\lambda_s(A) = |\lambda|(A \cap \{g = 1\})$ gegeben: Zunächst folgt mit $f = \chi_{\{g=1\}}$ aus der Gleichung (X) zunächst $0 = \int_{\{g=1\}} w\, d\mu$, so dass wegen $w(x) > 0$ folgt $\mu(\{g = 1\}) = 0$ und insbesondere $\lambda_s \perp \mu$. Die **Radon-Nikodym-Dichte** ist $h = w \sum\limits_{n=1}^{\infty} g^n$ mit $h(x) = \frac{w(x) \cdot g(x)}{1 - g(x)}$ für $g(x) < 1$ und $h(x) = \infty$ sonst: Mit $f = \chi_A \cdot \sum\limits_{n=0}^{m} g^n$ wird die Gleichung (X) zu $\int_A \left(1 - g^{m+1}\right) d|\lambda| = \int_A w \cdot \sum\limits_{n=1}^{m} g^n\, d\mu$ und durch Anwendung der monotonen Konvergenz 5.5 für $m \to \infty$ auf beiden Seiten erhält man $\lambda_a(A) = \int_A h\, d\mu$. Damit ergibt sich die μ-Stetigkeit des Maßes λ_A. Schließlich gilt wegen der Beschränktheit der totalen Variation $\lambda_A(X) < \infty$ und damit $h \in L^1(\mu)$. Die Lebesgue-Zerlegung für das komplexe Maß $\lambda = \mathrm{Re}\lambda + i\mathrm{Im}\lambda = (\mathrm{Re}\lambda)^+ - (\mathrm{Re}\lambda)^- + i\left((\mathrm{Im}\lambda)^+ - (\mathrm{Im}\lambda)^-\right)$ ergibt sich durch viermalige Anwendung der obigen Konstruktion auf positive und negative Variation des Real- bzw. Imaginärteils von λ.

10.8 Polardarstellung komplexer Maße: Für jedes komplexe Maß λ auf einem Messraum $(X; \mathcal{A})$ existiert eine messbare komplexwertige Funktion g mit $|g(x)| = 1\, \forall x \in X$ und $d\lambda = g\, d|\lambda|$.

Beweis: Wegen $\lambda \lessdot |\lambda|$ gibt es nach 10.7 ein $g \in L^1$ mit $d\lambda = g\, d|\lambda|$, welches noch auf den gewünschten Betrag angepasst werden muss. Für eine Partition $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Menge $A = \{|g| < r\}$ gilt $|\mu|(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_{A_n} g\, d|\lambda|\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} r \cdot |\lambda|(A_n) = r \cdot |\lambda|(A)$, d.h. für $r < 1$ muss gelten $|\lambda|(A) = 0$ bzw. λ-fast überall $|h| \geq 1$. Andererseits gilt aber für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $|\lambda|(A) > 0$ die Abschätzung $\left|\frac{1}{|\lambda|(A)} \int_A g\, d|\mu|\right| = \frac{|\lambda(A)|}{|\lambda|(A)} \leq 1$, so dass sich 5.14 mit $S = \overline{B}_1(0)$ anwenden lässt und λ-fast überall $|g| \leq 1$ ergibt. Damit ist die Behauptung λ-fast überall gezeigt und durch Korrektur von g auf der λ-Nullmenge $\{g \neq 0\}$ erhält man die gewünschte Funktion für alle $x \in X$.

10.9 Korollar: Für ein positives Maß μ auf einem Messraum $(X\mathcal{A})$ und $h \in L^1(\mu)$ mit $d\lambda = h\, d\mu$gilt $d|\lambda| = |h|\, d\mu$.

Beweis: Nach 10.8 gibt es ein g mit $|g(x)| = 1\, \forall x \in X$ und $d\lambda = g\, d|\lambda|$ und daher $g\, d|\lambda| = h\, d\mu$ bzw. $d|\lambda| = \overline{g} h\, d\mu$. Wegen $|\lambda| \geq 0$ und $\mu \geq 0$ folgt μ-fast überall $\overline{g} h \geq 0$ und insbesondere $\overline{g} h = |h|$.

10.10 Hahn-Zerlegung für signierte Maße: Die Jordan-Zerlegung eines signierten Maßes $\mu = \mu^+ - \mu^-$ lässt sich auf den Messraum $(X; \mathcal{A})$ übertragen: Es gibt eine **Hahn-Zerlegung** von X in zwei disjunkte Teilmengen $M^+ \cup M^- = X$ mit $M^+ \cap M^- = \emptyset$ und $\mu^+(A) = \mu(A \cap M^+)$ bzw. $\mu^-(A) = \mu(A \cap M^-)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Nach 10.9 gibt es eine messbare Funktion $g : X \to \{-1; 1\}$ mit $d\mu = g\, d|\mu|$, so dass $M^+ := \{g = 1\}$ und $M^- := \{g = -1\}$ messbar sind . Wegen $\frac{1}{2}(1 + g) = \chi_{M^+}$ folgt $\mu^+(A) = \frac{1}{2}(|\mu|(A) + \mu(A)) = \int_A \frac{1}{2}(1 + g)\, d|\mu| = \mu(A \cap M^+)$ und analog für μ^-.

10.11 Dualraum zu $L^p(\mu)$: Für σ-endliche positives Maße μ und $1 < p < \infty$ lässt sich jedes beschränkte lineare Funktional $\Lambda : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ als Integral $\Lambda(f) = \int f g\, d\mu$ darstellen mit einem eindeutig bestimmten $g \in L^q(\mu)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für die Norm $\|\Lambda\| = \sup\left\{\Lambda\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right) : f \in L^p(\mu)\right\}$ des linearen Fuktionals gilt $\|\Lambda\| = \|g\|_q$, d.h., $L^q(\mu)$ ist isometrisch und isomorph zum Dualraum $\widetilde{L^q}(\mu)$.

Beweis: Die **Eindeutigkeit** von g folgt mit $f = \chi_A$ für $A \in \mathcal{A}$ aus 5.7.3. Zur Existenz definiere $\lambda(A) = \Lambda(\chi_A)$. Für eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $B_n = \mathring{\bigcup}_{0\leq k\leq n} A_k$ und $B = \mathring{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k$ gilt dann wegen der Stetigkeit von oben 2.2.5 des Maßes μ zunächst $\lim_{n\to\infty}\|\chi_B-\chi_{B_n}\|_p=\lim_{n\to\infty}\left\|\chi_{B\setminus B_n}\right\|_p=\lim_{n\to\infty}(\mu(B\setminus B_n))^{\frac{1}{p}}=0$ und wegen der Stetigkeit des linearen Funktionals Λ weiter $\lim_{n\to\infty}\lambda(B_n)=\lambda(B)$. λ ist also σ-additiv und damit ein komplexes Maß. Für eine μ-Nullmenge E ist $\|\chi_E\|_p=0$ und wieder aufgrund der Stetigkeit des linearen Funktionals auch $\lambda(E)=0$, also $\lambda\lessdot\mu$. Nach 10.7 gibt es ein $g\in L^1(\mu)$ mit $\Lambda(\chi_A)=\int_A g\,d\mu=\int\chi_A g\,d\mu$ für alle $A\in\mathcal{A}$. Aus der Linearität von Λ folgt $\Lambda(f)=\int fg\,d\mu$ zunächst für $f\in\mathcal{E}(X)$ und wegen der Stetigkeit von Λ und 6.8 auch für jedes $f\in L^\infty(\mu)$. Dabei wird auf er linken Seite ausgenutzt, dass ein μ-fast überall beschränktes $f\in L^\infty(\mu)$ als Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}(X)$ ausgedrückt werden kann, die wegen $\|f\|_p\leq\|f\|_\infty\cdot(\mu(X))^{\frac{1}{p}}$ auch im p-ten Mittel konvergiert, woraus der Konvergenz von Λ folgt. Auf der rechten Seite wird direkt die gleichmäßige Konvergenz genutzt, aus der wegen $|\int fg\,d\mu|\leq\|f\|_\infty\cdot\|g\|_1$ die Konvergenz des Integrals folgt. Um die Gültigkeit für $f\in L^p(\mu)$ zu erweitern, zeigt man zunächst, dass $g\in L^q(\mu)$: Sei dazu $E_n=\{|g|\geq n\}$ für $n\in\mathbb{N}$ und $f=\frac{|g|^q}{g}\cdot\chi_{E_n}\in L^\infty(\mu)$ für $n\in\mathbb{N}$, so dass $|f|^p\cdot\chi_E=|g|^{(q-1)p}\cdot\chi_E=|g|^q\cdot\chi_E=fg$. Dann ist $\int_{E_n}|g|^q\,d\mu=\int fg\,d\mu=\Lambda(f)\leq\|\Lambda\|\cdot\|f\|_p=\|\Lambda\|\cdot\left(\int_{E_n}|g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\Leftrightarrow\left(\int_{E_n}|g|^q\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}\leq\|\Lambda\|\Leftrightarrow\int_{E_n}|g|^q\,d\mu\leq\|\Lambda\|^q$ und nach Satz 5.5 von der monotonen Konvergenz folgt $\|g\|_q\leq\|\Lambda\|<\infty$ und insbesondere $g\in L^q(\mu)$. Aus der Hölder-Ungleichung 6.4.1 erhält man umgekehrt $\|\Lambda\|\leq\|g\|_q$ und damit die zweite Behauptung $\|\Lambda\|=\|g\|_q$. Ebenfalls aus der Hölder-Ungleichung folgt aus $\|g\|_q<\infty$, dass $f\mapsto\int fg\,d\mu$ stetig auf $L^p(\mu)$ist und da sie auf der nach 6.8 dichten Teilmenge $\mathcal{E}(X)\subset L^p(\mu)$mit der ebenfalls auf ganz $L^p(\mu)$stetigen Abbildung Λübereinstimmt, folgt damit die Behauptung für $\mu(X)<\infty$.

Für $\mu(X)<\infty$aber σ-endliches μ definiere wie im Beweis zu 10.7 ein $w:X\to]0;1[$ durch $w(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\chi_{A_n}}{2^n\cdot(1+\mu(A_n))}$ für eine abzählbare Überdeckung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$ von X mit $\mu(A_n)<\infty\forall n\in\mathbb{N}$, so dass das Maß $w d\mu$ **endlich** ist und wegen $w>0$ genau die gleichen Nullmengen besitzt wie μ. Die Bijektion $\omega_p:L^p(d\mu)\to L^p(wd\mu)$ mit $\omega_p(f)=w^{-\frac{1}{p}}\cdot f$ bzw. $\omega_p^{-1}(\omega(f))=w^{\frac{1}{p}}\cdot\omega_p(f)$ ist dann eine lineare Isometrie und $\Lambda\circ\omega_p^{-1}:L^p(wd\mu)\to\mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional mit $\left\|\Lambda\circ\omega_p^{-1}\right\|=\sup\left\{\Lambda\left(\frac{w^{\frac{1}{p}}\cdot\omega_p(f)}{\left(\int|\omega(f)|_p^p\cdot wd\mu\right)^{\frac{1}{p}}}\right):\omega_p(f)\in L^p(wd\mu)\right\}=\sup\left\{\Lambda\left(\frac{f}{\left(\int|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}}\right):f\in L^p(d\mu)\right\}=\|\Lambda\|$. Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es ein $\omega_q(g)\in L^q(wd\mu)$ mit $\left(\Lambda\circ\omega_p^{-1}\right)(\omega_p(f))=\int\omega_p(f)\cdot\omega_q(g)\,wd\mu$ für alle $\omega_p(f)\in L^p(wd\mu)$ bzw. $\Lambda(f)=\int fg\,d\mu$ für alle $f\in L^p(d\mu)$.

10.12 Bemerkung: Der Spezialfall $p=q=2$ wurde bereits im Beweis zu 10.7 hergeleitet, in dem die Isomorphie von $L^2(\varphi)$ zu seinem Dualraum zur Existenz des inneren Produktes und insbesondere zusammen mit der Vollständigkeit zur Hilbertraumeigenschaft führt, welche die Existenz der entsprechenden Repräsentanten $g\in L^2(\varphi)$ sicher stellte.

11 Der zentrale Grenzwertsatz

11.1 Reguläre Maße: Ein auf der **Borelschen** σ-Algebra $\mathcal{B}$ eines **Hausdorff-Raumes** X definiertes Maß μheißt

12 Maße auf polnischen Räumen

11.1 Reguläre Maße: Ein auf der **Borelschen** σ-Algebra $\mathcal{B}$ eines **Hausdorff-Raumes** X definiertes Maß μheißt

1. **Borel-Maß**, wenn jede kompakte Menge K ein endliches Maß $\mu(K)<\infty$ besitzt,
2. **lokal-endlich**, wenn jeder Punkt $x\in X$ eine Umgebung $U\in\mathcal{U}(x)$ mit endlichem Maß $\mu(U)<\infty$ besitzt,
3. **von innen regulär**, wenn für jede Borel-Menge $B\in\mathcal{B}$ gilt $\mu(B)=\sup\{\mu(K):K\subset B,K\text{ kompakt}\}$

4. **von außen regulär**, wenn für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}$ gilt $\mu(B) = \inf\{\mu(K) : B \subset O, O \text{ offen}\}$
5. **regulär**, wenn es von innen und von außen regulär ist,
6. **Radon-Maß**, wenn es lokal-endlich und von innen regulär ist.
7. Seine **Gesamtmasse** ist $\|\mu\| := \mu(X)$.

Beispiele:

1. Das **Dirac-Maß** $\epsilon_x(A) = \chi_A(x)$ für einen Punkt $x \in X$ eines **Haussdorff-Raumes** X und eine Borel-Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ ist ein von innen und außen reguläres Borel-Maß.
2. Das nach 2.3.2 auf $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ eines diskreten Raumes gemäß 1.2 definierte **Maß** $\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ ist ein lokal-endliches und von außen reguläres Borel-Maß. Es ist genau dann von innen regulär, wenn X abzählbar ist.
3. Das **Lebesgue-Maß** $\lambda^n := \bigotimes_{1 \le i \le n} \lambda$ auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ des $\mathbb{R}^n$ ist nach 7.8 bzw. dem Satz von Heine-Borel ([7, Satz 9.10]) ein σ-endliches Borel-Maß. Seine Regularitätseigenschaften werden im folgenden untersucht.

10.2 Lemma: Auf einem **Hausdorff-Raum** X mit **1. Abzählbarkeitsaxiom** ist jedes von innen reguläre **Borel-Maß** ein **Radon Maß**.

Beweis:

13 Maße auf lokalkompakten Räumen

12.1 Satz:

12.2 Rieszscher Darstellungssatz für positive Funktionale Rudin Th 2.14

12.3 Rieszscher Darstellungssats für beschränkte Funktionale Rudin Th 6.18

14 Differentiation

13.1 Satz:

Index

Literatur

[1] H. Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*, De Gruyter 1990

[2] H. Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, De Gruyter 1991

[3] P. Billingsley: *Convergence of probability measure*s, Wiley 1999

[4] P. Gänssler, W. Stute: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer 1977

[5] E. Hewitt, K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis*, Springer 1965

[6] J. Kelley, T.P. Srinivasan.: *Measure and Integral*, Springer 1988

[7] M. Koecher: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer 1997

[8] W. Rudin: *Principles of mathematical analysis*, McGraw Hill 1976

[9] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill 1987

[10] W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw Hill 1991

[11] B. Von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie*, Springer 2001

[12] A. Vorwerg: *Bedingte Konvergenz von Vektorsummen*

[13] A. Vorwerg: *Mengenlehre*

[14] A. Vorwerg: *Topologie*