2.10. Prüfungsaufgaben zu Kegeln

Aufgabe 1: Kegel und Zylinder (19)

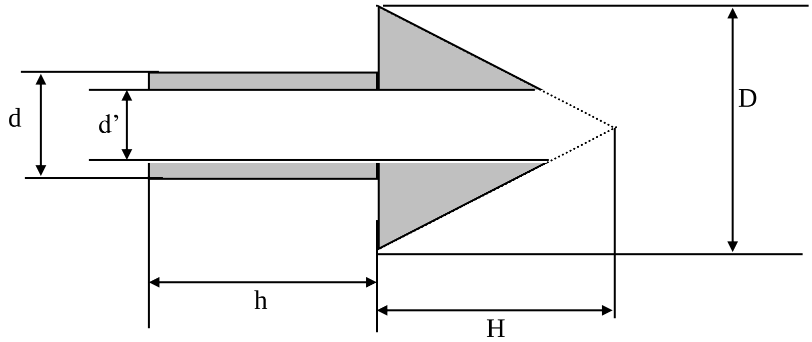
Das abgebildete massive Werkstück ist aus einem Zylinder (Durchmesser d = 4 cm, Höhe h = 3 cm) und einem Kegel (Durchmesser D = 6 cm, Höhe H = 4 cm) zusammengesetzt. Die Bohrung hat den Durchmesser d' = 2 cm.

a) Berechne das Volumen des Werkstücks. (6)

b) Bei welchem Bohrlochdurchmesser d' verliert der Kegel gleich viel Material wie der Zylinder? (3)

c) Berechne die Oberfläche des Werkstücks (8)

d) Bei welchem Bohrlochdurchmesser d' hat die Kegelbohrung die gleiche Mantelfläche wie die Zylinderbohrung ? (2)



Lösung

Man rechnet zweckmäßiger mit den Radien $R = \frac{1}{2}D = 3$ cm, $r = \frac{1}{2}d = 2$ cm und $r' = \frac{1}{2}d' = 1$ cm.

a) Der Zylinder hat das Volumen $V_Z = \pi r^2 h = 12\pi\ \text{cm}^3$ (1)

Der Kegel hat das Volumen $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = 12\pi\ \text{cm}^3$. (1)

Das Volumen der Zylinderbohrung ist $V_{Zb} = \pi r'^2 \cdot h = 3\pi\ \text{cm}^3$ (1)

Die Ausbohrung des Kegels setzt sich zusammen aus

einem Kegel mit dem Volumen $V_{KbK} = \frac{1}{3}\pi r'^2 \cdot H \cdot \frac{r'}{R} = \frac{4}{9}\pi\ \text{cm}^3$ (1)

einem Zylinder mit dem Volumen $V_{KbZ} = \pi r'^2 \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \frac{8}{3}\pi\ \text{cm}^3$ (1)

Das Volumen des Werkstückes ist $V = V_Z + V_K - V_{Zb} - V_{KbK} - V_{KbZ} = 17\frac{8}{9}\pi\ \text{cm}^3$ (1)

b) $V_{Zb} = V_{KbK} + V_{KbZ} \Leftrightarrow \pi r'^2 \cdot h = \pi r'^2 \cdot H \cdot \frac{r'}{R} + \pi r'^2 \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \pi r'^2 \cdot H \cdot (1 - \frac{2}{3}\frac{r'}{R})$ (2)

$\Leftrightarrow h = H \cdot (1 - \frac{2}{3}\frac{r'}{R}) \Leftrightarrow r' = \frac{3}{2}(1 - \frac{h}{H}) \cdot R = 1{,}125$ cm $\Rightarrow d' = 2r' = 2{,}25$ cm (1)

c) Der Kegel hat die Seitenlänge $S = \sqrt{H^2 + R^2} = 5$ cm (1)

Seine Mantelfläche ist $M_K = \pi RS = 15\pi\ \text{cm}^2$ (1)

Der Zylinder hat die Mantelfläche $M_Z = 2\pi rh = 12\pi\ \text{cm}^2$ (1)

Die Zylinderbohrung hat die Mantelfläche $M_{Zb} = 2\pi r'h = 6\pi\ \text{cm}^2$ (1)

Die Ausbohrung des Kegels setzt sich zusammen aus

einem Kegel mit der Mantelfläche $M_{KbK} = \pi r' \cdot S \cdot \frac{r'}{R} = \frac{5}{3}\pi\ \text{cm}^2$ (1)

einem Zylinder mit der Mantelfläche $M_{KbZ} = 2\pi r' \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \frac{16}{3}\pi\ \text{cm}^2$ (1)

Die Grundfläche des Werkstückes ist $G = \pi R^2 - \pi r'^2 = 8\pi\ \text{cm}^2$ (1)

Die Oberfläche des Werkstückes ist $O = M_Z + M_K + M_{Zb} + M_{KbK} + M_{KbZ} + G = 48\pi\ \text{cm}^2$ (1)

d) $M_{Zb} = M_{KbZ} \Leftrightarrow 2\pi r' \cdot h = 2\pi r' \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R})$ (1)

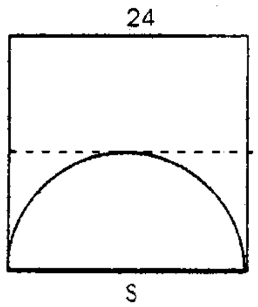
$\Leftrightarrow h = H \cdot (1 - \frac{r'}{R}) \Leftrightarrow r' = (1 - \frac{h}{H}) \cdot R = 0{,}75$ cm $\Rightarrow d' = 1{,}5$ cm (1)

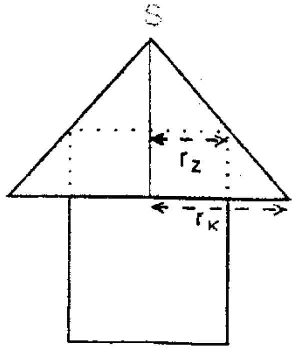
Aufgabe 2: Zylinder und Kegel (7)

a) Ein Bastler schneidet ein Quadrat der Seitenlänge 24 cm in zwei gleich große Rechtecke (siehe links). Das obere Rechteck biegt er zum Mantel eines 12 cm hohen Kreiszylinders zusammen. Zeige, dass der Zylinderradius $r_Z \approx 3{,}82$ cm ist. Berechne das Zylindervolumen. (2)

b) Aus dem unteren Rechteck schneidet er den abgebildeten Halbkreis aus und biegt ihn zum Mantel eines Kreiskegels zusammen. (siehe rechts) Zeige, dass sein Grundkreis den Radius $r_K = 6$ cm hat. Berechne das Volumen des Kegels. (3)

c) Der Kegel wird nun mit der Spitze S nach oben über den Zylinder gestülpt. Welche Gesamthöhe hat der entstandene Körper? (2)





Lösungen:

a) $u_z = 2\pi r_z \Leftrightarrow r_z = \frac{u_z}{2\pi} = \frac{24\text{cm}}{2\pi} \approx 3{,}82$ cm (1)

$V_z = \pi r_z^2 \cdot h_z = \pi \cdot (3{,}82 \text{ cm})^2 \cdot 12 \text{ cm} \approx 550 \text{ cm}^3$. (1)

b) $\pi \cdot 12 \text{ cm} = 2\pi r_K \Leftrightarrow r_K = 6$ cm (1)

$h_K = \sqrt{12^2 - 6^2}$ cm $= 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow V_K = \frac{1}{3}\pi r_K^2 \cdot h_K = 72 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 391{,}78 \text{ cm}^3$. (2)

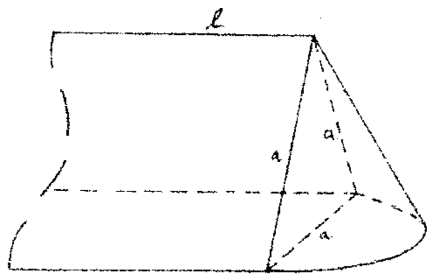
c) Strahlensatz: $\frac{h - h_Z}{h_K} = \frac{r_Z}{r_K} \Leftrightarrow h = h_Z + \frac{r_Z}{r_K} \cdot h_K = 12 \text{ cm} + \frac{2}{\pi} \cdot 6\sqrt{3}$ cm $\approx 18{,}62$ cm (2)

Aufgabe 3: Prismen und Kegel (4)

Ein senkrechtes Prisma P besitzt als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 6 cm. Die Höhe des Prismas ist l = 4a.

a) Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas. (2)

b) An beiden Dreiecksflächen des Prismas werden Kegelhälften angesetzt. Dadurch entsteht ein neuer Körper (vgl. Skizze). Um wie viel Prozent vergrößert sich dabei das Volumen? (2)



Lösungen:

a) $V_P = G \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot 4a = \sqrt{3}\, a^3 = 216\sqrt{3} \text{ cm}^3 \approx 374{,}12 \text{ cm}^3$ (1)

$O_P = M_P + 2G = 3 \cdot 4a^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = (12 + \frac{\sqrt{3}}{2})a^2 \approx 463{,}18 \text{ cm}^2$. (1)

b) $V_K = \frac{1}{3}\pi r_K^2 \cdot h_K = \frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} a^3$. (1)

$\frac{V_K}{V_P} = \frac{\pi}{6} \approx 52{,}4$ % (1)

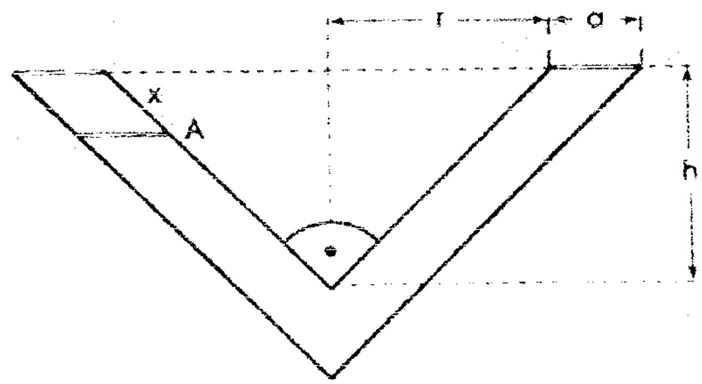
Aufgabe 4: Kegel (7)

Eine Brunnenschale aus Marmor besteht aus einem Hohlkegel. Dabei sind Radius r und Höhe h gleich groß (siehe den skizzierten Querschnitt). Der Rand hat überall die Breite a = 3 cm.

a) Wie groß müsste der Radius r sein, damit das Fassungsvermögen der Schale bis zum oberen Rand 16 Liter beträgt? (1)

b) Es sei nun r = 25 cm angenommen. Welche Masse hat die Brunnenschale, wenn 1 cm^3 Marmor die Masse 2,6 g besitzt? Wie groß ist die gesamte Oberfläche der Schale? (3)

c) Es sei wieder r = 25 cm. Wenn die Brunnenschale zu 80 % ihres Volumens gefüllt ist, soll das weiter zufließende Wasser durch ein im Rand angebrachtes (dünnes) Abflussrohr abfließen können? In welcher Entfernung x vom oberen Rand muss das Abflussrohr angebracht werden? (3)



Lösungen:

a) $16\,000\ \text{cm}^3 = \frac{\pi}{3}r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{48000}{\pi}} \approx 24{,}81$ cm (1)

b) $V = \frac{\pi}{3}(28^3 - 25^3)\ \text{cm}^3 \approx 6625{,}6\ \text{cm}^3$ und $m = \rho\cdot V \approx 17{,}23$ kg (1)

$O = M_a + M_i + A_R = \pi\sqrt{2}\,(r + a)^2 + \pi\sqrt{2}\,r^2 + \pi(r + a)^2 - \pi r^2 = (3483{,}2 + 2776{,}6 + 499{,}5)\ \text{cm}^2 \approx 6759{,}5\ \text{cm}^2$ (2)

c) $\frac{\pi}{3}(r - \frac{x}{\sqrt{2}})^3 = 0{,}8\cdot\frac{\pi}{3}r^3 \Leftrightarrow r - \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{0{,}8}\,r \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\ \ 1 - \sqrt[3]{0{,}8}\ \ r \approx 2{,}53$ cm. (3)

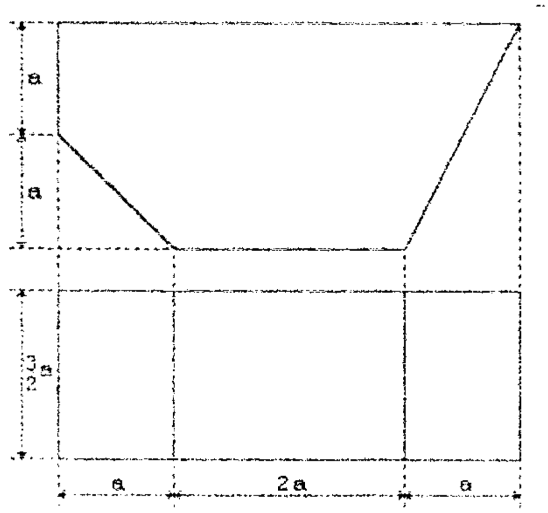
Aufgabe 5: Prismen, Zylinder und Kegel (5)

Die Skizze 1 zeigt den Aufriss und den Grundriss eines Transportcontainers, der oben offen ist.

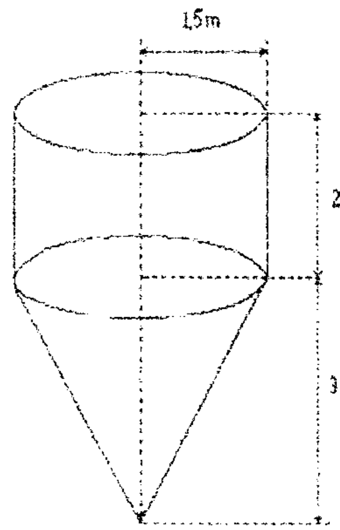
a) Berechne das Fassungsvermögen des beschriebenen Containers für a = 1,5 m.

b) In den Container werden 10 m^3 Sand eingeladen und zu einer Baustelle gebracht. Dort wird der Sand in ein bereitstehendes leeres Silo (Skizze 2) eingefüllt. Das Silo besteht aus einem senkrechter. Kreiskegel und einem daran. angesetzten Trichter in Form eines senkrechten Kreiskegels. Die Maße sind der Skizze 2 zu entnehmen. Bis zu welcher Höhe ist das Silo nun gefüllt?

Skizze 1



Skizze 2



Lösungen:

$V = 1{,}5a\cdot 5{,}5a^2 = 8{,}25\ a^3 = 27{,}84\ m^3$ (2)

$V_K = \frac{\pi}{3}\cdot 3\ m\cdot(1{,}5\ m)^2 \approx 7{,}1\ m^3$ (1)

$2{,}9\ m^3 = \pi\cdot h\cdot(1{,}5\ m)^2 \Leftrightarrow h = \frac{2{,}9\ m^3}{\pi\cdot(1{,}5\ m)^2} \approx 0{,}41$ m (2)

Aufgabe 6 (8)

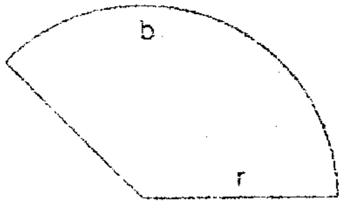
Der Kreisausschnitt aus Figur 1 hat den Radius r = 21,54 cm und den Bogen b = 50,27 cm.

a) Berechne seinen Flächeninhalt und seinen Mittelpunktswinkel. (2)

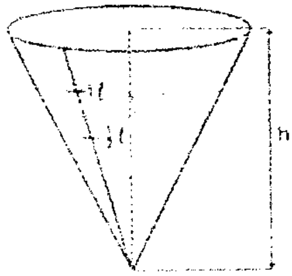
b) Aus dem Kreisausschnitt in Figur 1 wird (ohne Überlappung) ein Messbecher wie in Figur 2 geformt. Zeige: Die Höhe h des Messbechers beträgt gerundet 20 cm. (2)

c) Welches Volumen hat dieser Messbecher? (1)

d) Der Messbecher soll längs einer Mantellinie mit Markierungen für die Füllmengen 1/2 Liter und 1 Liter versehen werden (siehe Figur 2). Welchen Abstand haben diese beiden Markierungen voneinander? (3)



Figur 1



Figur 2

Lösungen

Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{b}{2\pi r} \cdot 360° \approx 133{,}72°$ (1)

Flächeninhalt = Mantel $M = \frac{b}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2} \approx 541{,}41\ cm^2$. (1)

Kegelradius $R = \frac{M}{\pi r} = \frac{b}{2\pi} \approx 8{,}00$ cm (1)

Höhe $h = \sqrt{r^2 - R^2} \approx 20{,}00$ cm. (1)

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \approx 1340\ 41\ cm^3$. (1)

1 Liter: Faktor $k_1 = \sqrt[3]{\frac{1000}{1340{,}41}} \approx 0{,}91 \Rightarrow r_1 = k_1 \cdot r \approx 19{,}54$ cm (1)

0,5 Liter: Faktor $k_{0,5} = \sqrt[3]{\frac{500}{1340{,}41}} \approx 0{,}72 \Rightarrow r_{0,5} = k_{0,5} \cdot r \approx 15{,}50$ cm (1)

Die Markierungen haben den Abstand d = 19,54 cm − 15,50 cm = 4,04 cm voneinander (1)