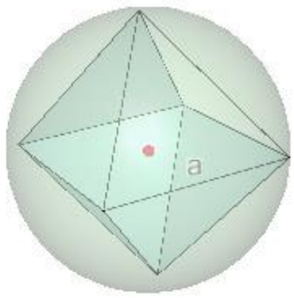
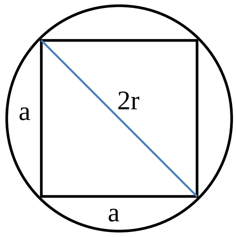
2.10. Prüfungsaufgaben zu Kugeln

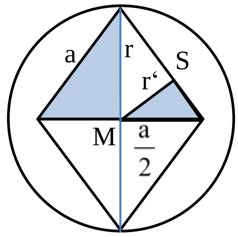
Aufgabe 1: Oktaeder in Kugel (5)
In eine Kugel vom Radius r wird ein Oktaeder einbeschrieben. (siehe rechts)



a) Berechne die Kantenlänge a des Oktaeders in Abhängigkeit von r.
b) Welchen Abstand hat der Mittelpunkt einer Seitenkante von der Kugeloberfläche?
c) Welchen Abstand hat der Schwerpunkt (= Höhenschnittpunkt) der Seitenflächen von der Kugeloberfläche?

Lösungen:





a) Kantenlänge a = $\sqrt{2}$ r (Pythagoras) (1)

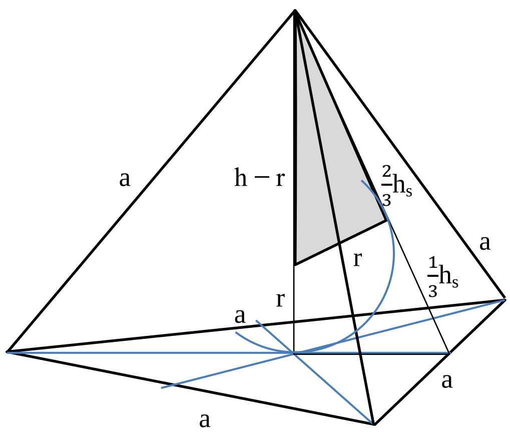
b) Abstand = $r - \frac{1}{2}a = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$ (1)

c) Nach dem Strahlensatz gilt für den Abstand r‘ des Seitenflächenschwerpunktes S vom Mittelpunkt M $r‘ : \frac{a}{2} = r : a \Rightarrow r‘ = \frac{r}{2}$ (2)

d) Abstand = $r - r‘ = \frac{r}{2}$. (1)

Aufgabe 2: Kugel in Tetraeder (7)
Berechnen Sie die Kantenlänge eines Tetraeders, der einer Kugel mit Radius r **um**beschrieben wird.

Lösungen:
Die Berührungspunkte der Kugel liegen auf den Schwerpunkten der Seitenflächen. Diese liegen in den Schnittpunkten der Seitenhalbierenden mit der Länge $h_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, die dort im Verhältnis 1 : 2 geschnitten werden. Der längere Abschnitt hat also die Länge $\frac{2}{3}h_s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Die Höhe des Tetraeders ist $h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{h_s}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$. In dem schraffierten rechtwinkligen Dreieck gilt



$(h - r)^2 = r^2 + \left(\frac{2}{3}h_s\right)^2$ (2)

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - r\right)^2 = r^2 + \frac{1}{3}a^2$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}ar + r^2 = r^2 + \frac{1}{3}a^2$ (1)

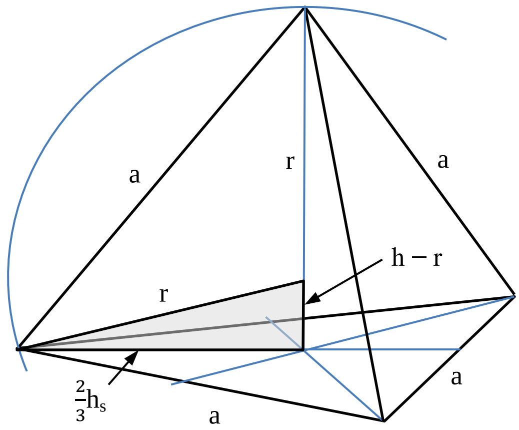
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}ar = 0$ (0,5)

$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{6}ar = 0$ (0,5)

$\Rightarrow a = 2\sqrt{6}r$ (oder a = 0) (1)

Aufgabe 3: Tetraeder in Kugel (6)
Berechnen Sie die Kantenlänge eines Tetraeders, der einer Kugel mit Radius r einbeschrieben wird.

Lösungen:
Die Berührungspunkte der Kugel liegen auf den Eckpunkten. Diese liegen in den Schnittpunkten der Seitenhalbierenden mit der Länge $h_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, die dort im Verhältnis 1 : 2 geschnitten werden. Der längere Abschnitt hat also die Länge $\frac{2}{3}h_s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Die Höhe des Tetraeders ist $h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{h_s}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$. In dem schraffierten rechtwinkligen Dreieck gilt



$r^2 = (h - r)^2 + \left(\frac{2}{3}h_s\right)^2$ (2)

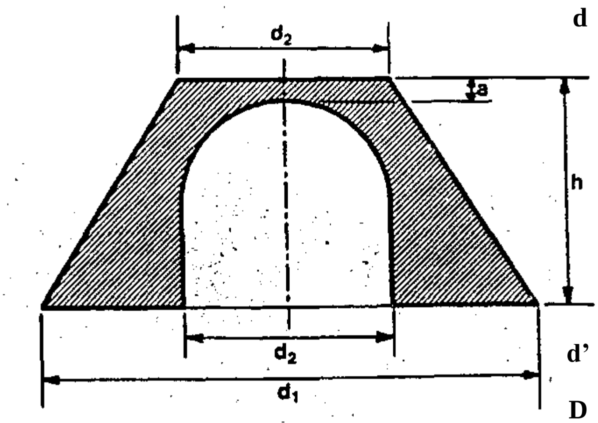
$\Leftrightarrow r^2 = (\frac{\sqrt{6}}{3}a - r)^2 + \frac{1}{3}a^2$ (2)

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}ar + r^2 + \frac{1}{3}a^2$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6}}{3}ar = a^2$ (0,5)

$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$ (0,5)

Aufgabe 4: Zylinder, Kegel und Kugeln (18)
Ein Werkstück besteht aus einem Kegelstumpf mit den Maßen D = 10 cm, h = 6 cm und d = 5 cm, in den ein Loch mit halbkugelförmigem Abschluß gebohrt wurde. Es hat den Durchmesser d’ = 4 cm und endet im Abstand a = 1 cm von der Oberfläche.



a) Berechne das Volumen des Werkstückes. (6)
b) Bei welchem Bohrdurchmesser d’ hat der ausgebohrte Zylinder das gleiche Volumen wie die ausgebohrte Halbkugel ? (2)
c) Berechne die Oberfläche des Werkstückes (8)
d) Bei welchem Bohrdurchmesser d’ hat der ausgebohrte Zylinder die gleiche Mantelfläche wie die ausgebohrte Halbkugel ? (2)

Lösung

Man rechnet zweckmäßiger mit den Radien $R = \frac{1}{2}D = 6$ cm, $r = \frac{1}{2}d = 2{,}5$ cm und $r' = \frac{1}{2}d' = 2$ cm.

a) Der Kegelstumpf entsteht aus einem großen Kegel mit der Höhe H = 12 cm und dem Radius R = 5 cm durch Entfernen eines kleinen Kegels mit der Höhe h = 6 cm und dem Radius r = 2,5 cm.

Der große Kegel hat das Volumen $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 100\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der kleine Kegel hat das Volumen $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12{,}5\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der Kegelstumpf hat das Volumen $V_{KS} = V_K - V_k = 87{,}5\,\pi\text{ cm}^3$. (1)

Die ausgebohrte Halbkugel hat das Volumen $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r'^3 = 5\frac{1}{3}\pi\ cm^3$ (1)

Der ausgebohrte Zylinder hat das Volumen $V_Z = \pi r'^2 \cdot h_z = 12\ \pi\ cm^3$. (1)

Das Werkstück hat also das Volumen $V_{KS} - V_{HK} - V_Z = 67\frac{1}{6}\pi\ cm^3$. (1)

b) $V_{HK} = V_Z \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r'^3 = \pi r'^2 \cdot h_z \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r'^3 = \pi r'^2 \cdot (5 - r') \Leftrightarrow \frac{2}{3} r' = 5 - r' \Leftrightarrow r' = 3\ cm \Rightarrow d' = 6\ cm$. (2)

c) Der Kegelstumpf entsteht aus einem großen Kegel mit der Höhe $H = 12$ cm und dem Radius $R = 5$ cm durch Entfernen eines kleinen Kegels mit der Höhe $h = 6$ cm und dem Radius $r = 2{,}5$ cm.

Der große Kegel hat die Seitenhöhe $S = \sqrt{H^2 + R^2} = 13\ cm$ (1)
Der große Kegel hat die Mantelfläche $M_K = \pi RS = 65\ \pi\ cm^2$ (1)

Der kleine Kegel hat die Seitenhöhe $s = \frac{1}{2} S$ und die Mantelfläche $M_k = \pi rs = 16{,}25\ \pi\ cm^2$ (1)

Der Kegelstumpf hat die Mantelfläche $M_{KS} = M_K - M_k = 48{,}75\ \pi\ cm^2$. (1)
Die ausgebohrte Halbkugel hat die Oberfläche $O_{HK} = 2\pi r'^2 = 8\ \pi\ cm^2$ (1)
Der ausgebohrte Zylinder hat die Mantelfläche $M_Z = 2\pi r' \cdot h_z = 12\ \pi\ cm^2$. (1)
Die Grundfläche ist $G = \pi R^2 - \pi r'^2 = 21\ \pi\ cm^2$ (1)
Das Werkstück hat also die Oberfläche $O = M_{KS} + O_{HK} + M_Z + G = 89{,}75\pi\ cm^2$. (1)

d) $O_{HK} = M_Z \Leftrightarrow 2\pi r'^2 = \pi r' \cdot h_z = 2\pi r' \cdot (5 - r') \Leftrightarrow r' = 5 - r' \Leftrightarrow r' = 2{,}5\ cm \Rightarrow d' = 5\ cm$. (2)