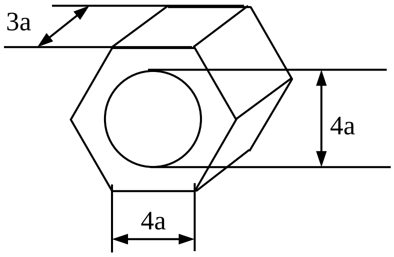
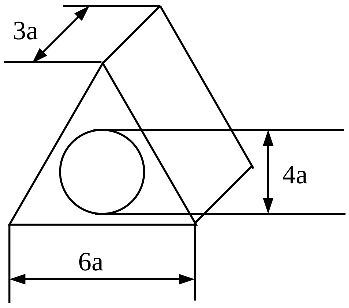
2.10. Prüfungsaufgaben zu Prismen und Zylindern

Aufgabe 1: Prismen und Zylinder
Berechne die Oberfläche und das Volumen der abgebildeten Körper in Abhängigkeit von a.



a)



b)

Lösung
Körper a)

Volumen $V = V_{Prisma} - V_{Zylinder}$ (1)

$= 6\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot(4a)^2\cdot(3a) - \pi\cdot(2a)^2\cdot(3a)$ (1)

$= (72\sqrt{3} - 12\pi)a^3$ (1)

Oberfläche $O = 2G_{Prisma} - 2G_{Zylinder} + M_{Prisma} + M_{Zylinder}$ (1)

$= 2\cdot 6\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot(4a)^2 - 2\cdot\pi\cdot(2a)^2 + 6\cdot 4a\cdot 3a + \pi\cdot 4a\cdot 3a$ (1)

$= (48\sqrt{3} + 4\pi + 72)a^2$. (1)

Körper b)

Volumen $V = V_{Prisma} - V_{Zylinder}$ (1)

$= \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot(6a)^2\cdot(3a) - \pi\cdot(2a)^2\cdot(3a)$ (1)

$= (27\sqrt{3} - 12\pi)a^3$ (1)

Oberfläche $O = 2G_{Prisma} - 2G_{Zylinder} + M_{Prisma} + M_{Zylinder}$ (1)

$= 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot(6a)^2 - 2\cdot\pi\cdot(2a)^2 + 3\cdot 6a\cdot 3a + \pi\cdot 4a\cdot 3a$ (1)

$= (18\sqrt{3} + 4\pi + 36)a^2$. (1)

Aufgabe 2: Quader (2)
Welches Volumen hat ein Würfel, wenn seine Raumdiagonale 10 cm lang ist?

Lösung:

Raumdiagonale $d = \sqrt{3}\,a \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm $\Rightarrow V = \frac{1000}{3\sqrt{3}} \approx 192$ cm^3.

Aufgabe 3: Quader (2)
Ein Würfel hat die Oberfläche O = 1350 cm^2. Berechne das Volumen und die Raumdiagonale des Würfels.

Lösung
a = 15 cm, $V = a^3 = 3375$ cm^3 und $d = \sqrt{3}\,a = 25{,}98$ cm.

Aufgabe 4: Prismen (2)
Eine Marmorsäule hat die Grundfläche eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Seiten 60 cm lang sind. Die Höhe h der Säule ist 2 m. Welches Volumen hat die Säule?

Lösung

$G = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 9353{,}1$ cm^2 = 0,94 m^2 $\Rightarrow V = G\cdot h = 1{,}87$ m^3.

Aufgabe 5: Prismen (3)
Ein symmetrischer Eisenbahndamm der Länge l = 300 m misst an seiner Sohle s = 21 m, seine Höhe beträgt h = 6 m, die Krone ist k = 5 m breit.

a) Berechne die Querschnittsfläche G. (2)
b) Welche Erdmenge (in m^3) musste beim Bau aufgeschüttet werden? (1)

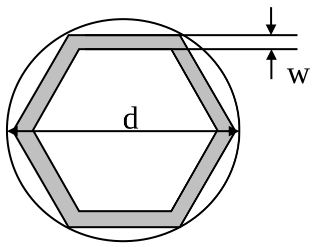
Lösung

a) $G = k \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s-k}{2} \cdot h = \frac{s+k}{2} \cdot h = \underline{78\ m^2}$. (2)

b) $V = G \cdot l = \underline{23\,400\ m^3}$. (1)

Aufgabe 6: Prismen (6)

Ein Aluminiumprofil ($\rho = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}$) hat einen sechseckigen Querschnitt mit der Wanddicke w = 3 mm und dem Durchmesser d = 16 mm. Wieviel g wiegt 1 m dieses Profils?



Lösung

Der Flächeninhalt des äußeren Sechseckes ist $G_a = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \approx 166{,}3\ mm^2$ (1)

Der Flächeninhalt des inneren Sechseckes ist $G_i = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (r - w)^2 \approx 65{,}0\ mm^2$ (1)

Die Querschnittsfläche ist als $Q = G_a - G_i = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} [r^2 - (r - w)^2] = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot w \cdot (2r - w) \approx \underline{1{,}01\ cm^2}$. (1)

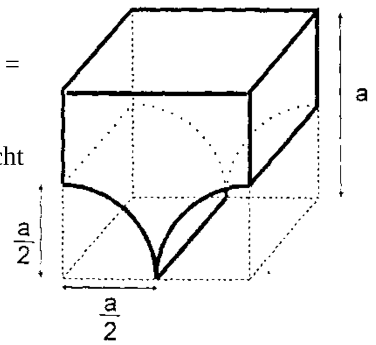
Das Volumen des Prismas ist dann $V = G \cdot h \approx 1{,}01\ cm^3 \cdot 100\ cm = \underline{101\ cm^3}$ (1)

Das Gewicht des Profils ist $m = \rho \cdot V \approx 2{,}7\ \frac{g}{cm^3} \cdot 101\ cm^3 = \underline{273{,}5\ g}$ (1)

Das Gewicht des Profils ist $m = \rho \cdot V \approx 2{,}7\ \frac{g}{cm^3} \cdot 101\ cm^3 = \underline{273{,}5\ g}$ (1)

Aufgabe 7: Zylinder (9)
Der abgebildete Körper ist Teil eines Würfels mit der Kantenlänge a = 1 m.

a) Berechne seine Masse (Dichte $\rho = 2{,}5\ g/cm^3$) (3)
b) Der Körper erhält einen Anstrich der Dicke d = 0,1 mm. Reicht dafür eine Dose mit 450 ml Farbe aus? (6)



Lösung:

a) $V = V_W - V_{HZ} = a^3 - \frac{1}{2} \pi \frac{a^2}{4} \cdot a = (1 - \frac{\pi}{8}) a^3 \approx 0{,}607\ a^3$. (2)

Mit a = 1 m ergibt sich die Masse $m = \rho \cdot V = 1{,}51$ t. (1)

b) $O = 4a^2 - \pi \frac{a^2}{4} + \pi \frac{a}{2} \cdot a = 4a^2 (4 + \frac{\pi}{4}) \approx 4{,}78 m^2$ für a = 1 (3)

c) Farbvolumen $V = O \cdot d = 4{,}79 \cdot 10^6 mm^2 \cdot 0{,}1 mm = 479\,000\ mm^3 = 479\ cm^3 = 479\ ml > 450\ ml$ (2)

$\Rightarrow$ die Dose reicht also nicht aus. (1)

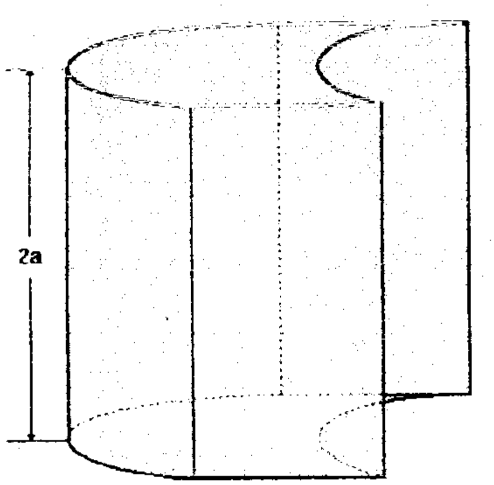
Aufgabe 8: Zylinder

Der Wasserbehälter einer Kaffeemaschine hat die Form einer geraden Säule wie in Figur 1. Ihre Grundfläche wird durch den schraffierten Bereich in Figur 2 wiedergegeben; sie wird von Strecken und Kreisbögen begrenzt.

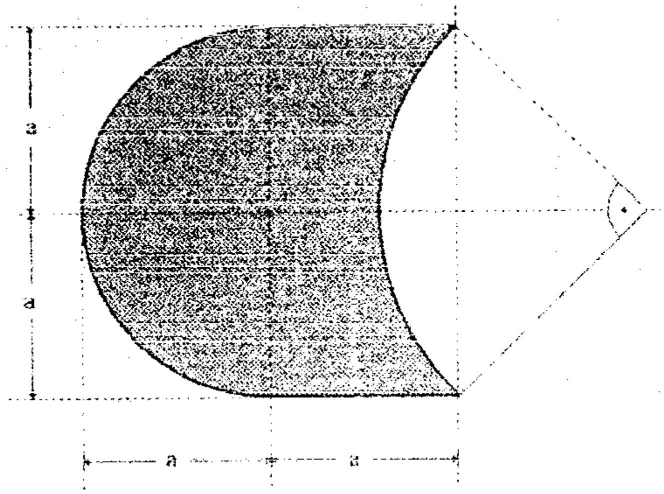
a) Zeige, dass die Grundfläche der Säule den Inhalt $3a^2$ besitzt.

b) Für welchen Wert von a fasst der Wasserbehälter einen Liter?

c) Bei einem anderen Wasserbehälter dieser Form ist a = 6 cm. Das Innere des oben offenen Behälters trägt eine Schutzschicht gegen das Verkalken. Ein Quadratdezimeter dieses Belags kostet 0,85 €. Welche Kosten entstehen durch diesen Schutzbelag?



Figur 1



Figur 2