2.10. Körperberechnungen

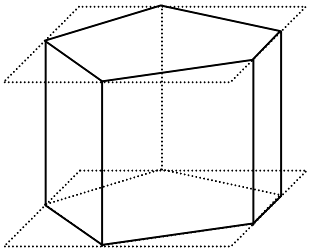
2.10.1. Quader und Prismen

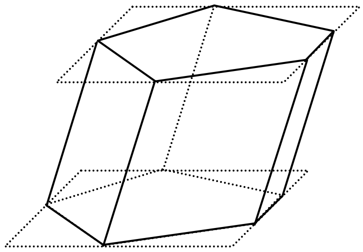
Satz: Ein **Quader** mit Seitenlängen a, b, c hat das **Volumen** $V = a\cdot b\cdot c$ und die **Oberfläche** $O = 2(ab + bc + ac)$

Beweis:
Für natürliche a, b, c durch Ausfüllen des Quaders mit Würfeln der Kantenlänge 1 LE, für rationale a, b, c durch Übergang zu kleineren Längeneinheiten, für reelle a, b, c durch Näherung mit rationalen a, b, c.

Übungen: Aufgaben zu Körperberechnungen Nr. 1

Definition:
Ein **Prisma** ist ein Körper, der durch Parallelverschiebung einer vieleckigen **Grundfläche** im Raum entsteht. Der **Mantel** besteht daher aus **Parallelogrammen**. Der Abstand der beiden Grundflächen ist die **Höhe** des Prismas. Bei **senkrechten** Prismen stehen die Grundflächen senkrecht übereinander, bei **schiefen** Prismen sind sie versetzt. Für die Darstellung in **Parallelprojektion** (siehe 2.3. Körper) zeichnet man zunächst das **einhüllende Quader** und entfernt dann die überstehenden Kanten (griech. **prsimein** = sägen):

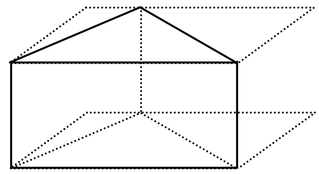




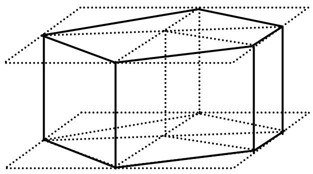
Satz: Ein **Prisma** mit der Grundfläche G und der Höhe h hat das **Volumen** $V = G\cdot h$.

Beweis:

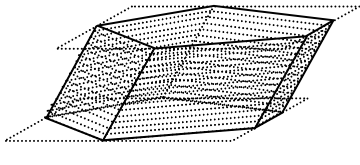
1. Schritt:
Gerade Prismen mit dreieckiger Grundfläche.
Man betrachtet das Prisma als halben Quader mit
$V = \frac{1}{2}\, a\cdot b\cdot c = (\frac{1}{2}\, ab)\cdot c = G\cdot h$.



2. Schritt:
Gerade Prismen mit n-eckiger Grundfläche
Man zerlegt das Prisma in dreiseitige Prismen mit dreieckigen Grundflächen G_1, G_2, ... G_n, und erhält
$V = G_1h + G_2h + ... + G_nh = (G_1 + G_2 + ... + G_n)h = G\cdot h$.



3. Schritt:
Schiefe Prismen (Prinzip von Cavalieri)
Man zerschneidet das Prisma parallel zur Grundfläche in beliebig viele **Querschnittsflächen** und verschiebt diese parallel zueinander, bis man wieder ein gerades Prisma erhält. Das Volumen bleibt dabei unverändert:
$V = G\cdot h$



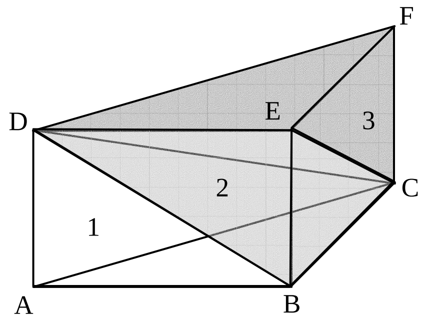
Satz: Ein **Prisma** mit der Mantelfläche M und der Grundfläche O hat die **Oberfläche** $O = 2G + M$

Übungen: Aufgaben zu Körperberechnungen Nr. 2 und 3

2.10.2. Pyramiden

Satz: Eine **Pyramide** mit der Grundfläche G und der Höhe h hat das **Volumen** $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

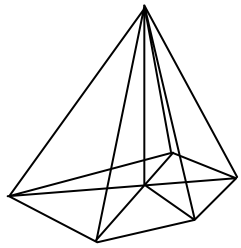
Beweis:
1. Schritt:
Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche



Eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche lässt sich durch zwei weiter gleich große Pyramiden zu einem Prisma mit gleicher Grundfläche und Höhe ergänzen:
$V_1 = V_2$, da $G_1 = ABD = DBE = G_2$ und $h_1 = BC = h_2$.
$V_2 = V_3$, da $G_2 = BCE = ECF = G_3$ und $h_2 = DE = h_3$.

$\Rightarrow V_1 = V_2 = V_3 = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

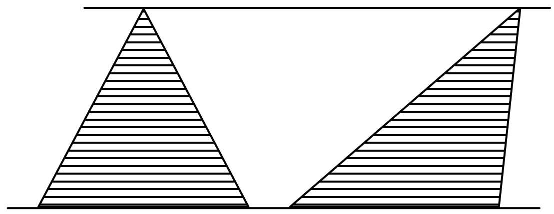
2. Schritt:
Pyramiden mit n-eckiger Grundfläche



Durch Zerteilung in n − 1 Pyramiden mit dreieckiger Grundflächen und gleicher Höhe G_1, G_2, ... G_{n-1}, erhält man

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} G_1 h + \frac{1}{3} G_2 h + \ldots + \frac{1}{3} G_{n-1} h \\ &= \frac{1}{3} (G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1}) h \\ &= \frac{1}{3} G \cdot h. \end{aligned}$$

3. Schritt:
Schiefe Pyramiden



Nach dem Prinzip von Cavalieri haben zwei Pyramiden mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe das gleiche Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.

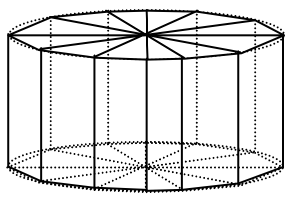
Satz: Eine **Pyramide** mit der Grundfläche G und der Mantelfläche M hat die **Oberfläche** $O = G + M$.

Übungen: Aufgaben zu Körperberechnungen Nr. 4 - 7

2.10.3. Zylinder

Satz: Ein **Zylinder** mit dem Radius r und der Höhe h hat das **Volumen** $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Beweis:



Die kreisförmige Grundfläche G eines Zylinders lässt sich durch n-eckige Flächen G_n **beliebig** genau annähern: $G_n \to G$ für $n \to \infty$. Das Volumen V des Zylinders mit der Grundfläche G und der Höhe h lässt sich durch entsprechende **Prismen** mit n-eckiger Grundfläche G_n und gleicher Höhe h annähern: Für $n \to \infty$ gilt einerseits $V_n \to V$ und andererseits $V_n = G_n \cdot h \to G \cdot h$. Da die Abweichung einerseits zwischen V_n und V und andererseits zwischen $V_n = G_n \cdot h$ und $G \cdot h$ beliebig klein wird, muss $V = G \cdot h$ sein

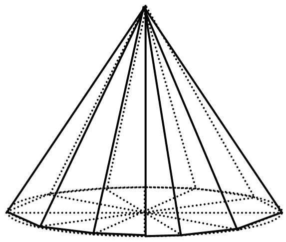
Satz: Ein **Zylinder** mit dem Radius r und der Höhe h hat die **Oberfläche** $O = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$.

Übungen: Aufgaben zu Körperberechnungen Nr. 8 – 10

2.10.4. Kegel

Satz: Ein **Kegel** mit Radius r und Höhe h hat das **Volumen** $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$.

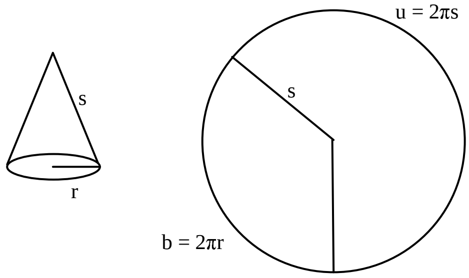
Beweis:
Kegel lassen sich durch **Pyramiden** mit n-eckiger Grundfläche und gleicher Höhe beliebig genau annähern. Die Argumentation verläuft genauso wie bei der Übertragung der Volumenformel von Prismen auf Zylinder.



Satz: Ein **Kegel** mit Radius r und Mantellänge s hat die **Mantelfläche** $M = \pi rs$ und die **Oberfläche** $O = \pi r(r + s)$

Beweis:

Wenn man den Mantel eines Kegels mit Radius r und Seitenhöhe s **abwickelt**, erhält man einen **Kreisausschnitt** mit Radius s und Bogenlänge $b = 2\pi r$. Sein Flächeninhalt ist $M = \frac{b}{u}\cdot\pi s^2 = \frac{r}{s}\cdot\pi s^2 = \pi rs$.. Die Oberfläche des Kegels ist dann $O = G + M = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r + s)$.

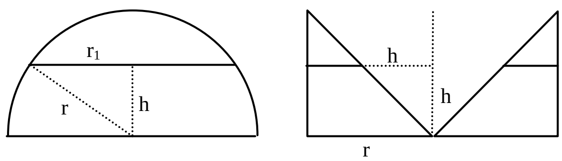


Übungen: Aufgaben zu Körperberechnungen Nr. 11 - 13

2.10.5. Kugeln

Satz: Eine **Kugel** mit Radius r hat das **Volumen** $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ und die **Oberfläche** $O = 4\cdot\pi\cdot r^2$.

Beweis:
Schneidet man eine **Halbkugel** in der Höhe h, so erhält man einen Kreis mit Flächeninhalt $A_h = \pi\cdot r^2 - \pi\cdot h^2$.
Bohrt man aus einem **Zylinder** mit Radius r und Höhe r einen **Kegel** mit gleichem Radius und gleicher Höhe **heraus** und schneidet ihn in der Höhe h, so erhält man einen Kreisring mit dem gleichen Flächeninhalt. Nach dem Satz von **Cavalieri** hat die Halbkugel also das gleiche Volumen wie der ausgebohrte Zylinder:



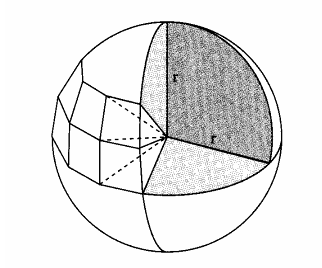
Kreis:
$r_1^2 = r^2 - h^2$
$A_h = \pi\cdot r_1^2$
$= \pi\cdot r^2 - \pi\cdot h^2$

Kreisring:
$A_h = \pi\cdot r^2 - \pi\cdot h^2$

$$V_{\frown} = V_{\sqcup} = V_{\square} - V_{\triangledown} = \pi\cdot r^2\cdot r - \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot r = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$$

$$\Rightarrow V_{\bigcirc} = 2\,V_{\frown} = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3.$$

Für die Berechnung der **Oberfläche** füllt man die Kugel mit beliebig vielen **Pyramiden** der Höhe r. Ihre Grundflächen bilden näherungsweise die Oberfläche der Kugel:
$O \approx G_1 + G_2 + \ldots + G_n$.
Ihre Volumina addieren sich näherungsweise zum Kugelvolumen:
$V \approx V_1 + V_2 + \ldots + V_n$
$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \approx \frac{1}{3}G_1\cdot r + \frac{1}{3}G_2\cdot r + \ldots + \frac{1}{3}G_n\cdot r$
$4\cdot\pi\cdot r^2 \approx G_1 + G_2 + \ldots + G_n$
$\approx O$.



Da die **Abweichung** für $n \to \infty$ **beliebig** klein wird, muss die Formel **exakt** gelten: $O = 4\pi r^2$.

Übungen: Aufgaben zu Körperberechnungen Nr. 14 - 16