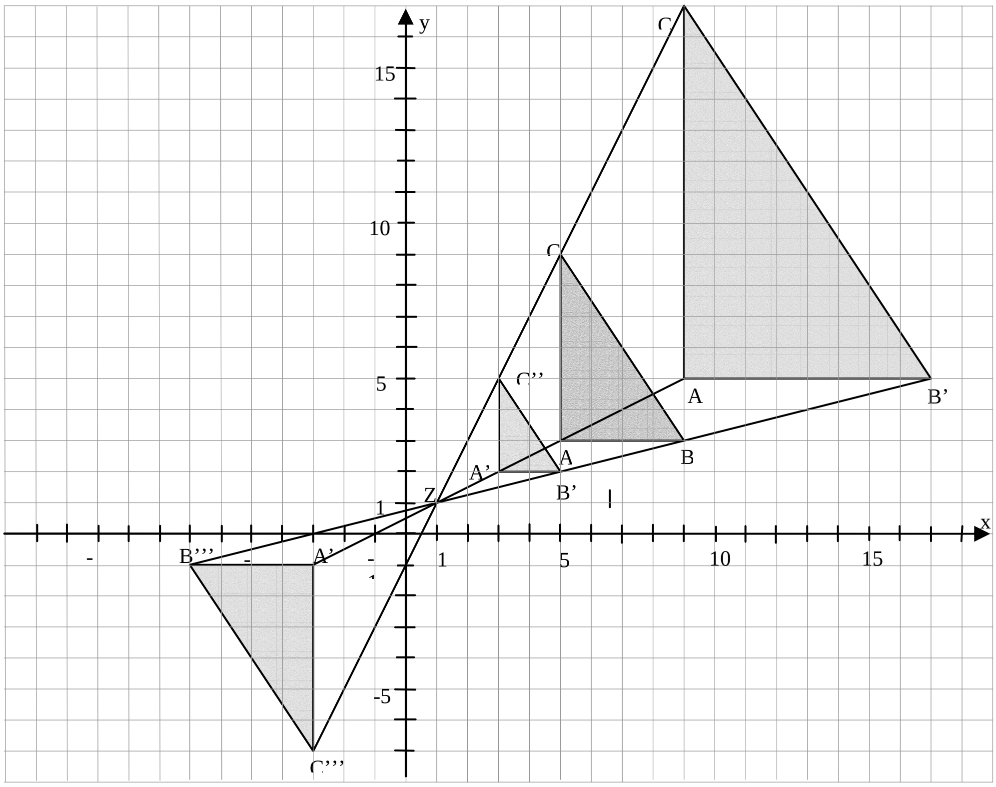
2.7. Ähnlichkeitsabbildungen

2.7.1. Die zentrische Streckung

Durch die **zentrische Streckung** $Z_{Z,\,k}$ am **Zentrum** Z mit dem **Streckfaktor** k wird ein Punkt P auf den Punkt P’ abgebildet, für den $\overline{ZP'} = k\cdot \overline{ZP}$ ist.

Beispiel:
Streckung des Dreieck ABC mit A(5|3), B(9|3) und C(5|9) am Zentrum Z(1|1) mit den Streckfaktoren
a) $k_1 = 2$
b) $k_2 = \frac{1}{2}$
c) $k_3 = -1$.



a) Das Dreieck wird an Z um den Faktor 2 **vergrößert** auf A’(9|5), B’(16|5) und C’(9|17)

b) Das Dreieck wird an Z um den Faktor $\frac{1}{2}$ **verkleinert** auf A’’(3|2), B’’(5|2) und C’’(3|15)

c) Das Dreieck wird an Z **gespiegelt** auf A’’’(−1|−3), B’’’(−7|−1) und C’’’(−3|−7)

Übungen: Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 1 - 3

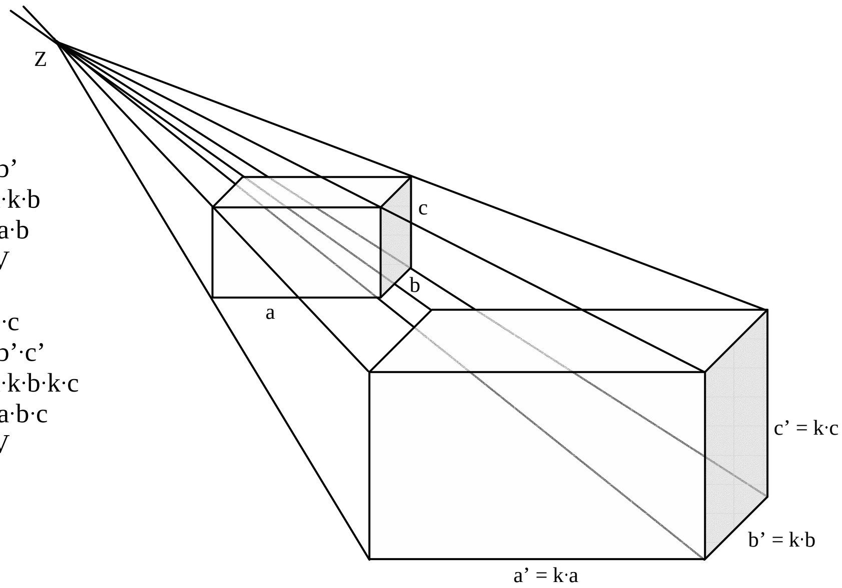
2.7.2. Eigenschaften der zentrischen Streckung

Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 4

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k
1. bleiben alle **Winkel** unverändert: $\alpha' = \alpha$,
2. bleiben **parallele** Strecken parallel: $g \,||\, h \Leftrightarrow g' \,||\, h'$
3. bleiben **Längenverhältnisse** (Proportionen) unverändert: $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$
4. ändern sich **Längen** um den Faktor k: $a' = k\cdot a$
5. ändern sich **Flächeninhalte** um den Faktor k^2 : $A' = k^2\cdot A$
6. ändern sich **Volumeninhalte** um den Faktor k^3: $V' = k^3\cdot V$

$$
\begin{aligned}
A &= a \cdot b \\
A' &= a' \cdot b' \\
&= k \cdot a \cdot k \cdot b \\
&= k^2 \cdot a \cdot b \\
&= k^2 V
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= a \cdot b \cdot c \\
V' &= a' \cdot b' \cdot c' \\
&= k \cdot a \cdot k \cdot b \cdot k \cdot c \\
&= k^3 \cdot a \cdot b \cdot c \\
&= k^3 V
\end{aligned}
$$



Übungen: Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 5 und 6

2.7.3. Die Strahlensätze

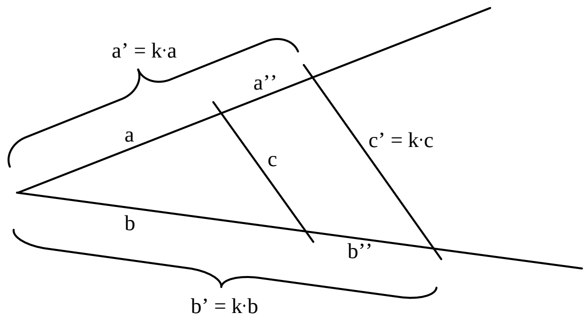
In der Geometrie und in der Vermessungstechnik wendet man eine einfache **zentrische Streckung eines Dreiecks an einer seiner Ecken** an, um nicht direkt messbare (z.B. weil unzugängliche) Streckenlängen zu berechnen. Die schon früher (vgl. 2.2. geometrische Grundkonstruktionen)= erwähnte **Streckenteilung durch Parallelen** wird dadurch auf beliebige (auch nicht ganzzahlige) Verhältnisse erweitert:

1. Strahlensatz

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{a'}{b'}$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{(k-1) \cdot a}{(k-1) \cdot b} = \frac{a''}{b''}$$



2. Strahlensatz

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Übungen: Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 7 - 20

2.7.4. Ähnliche Figuren

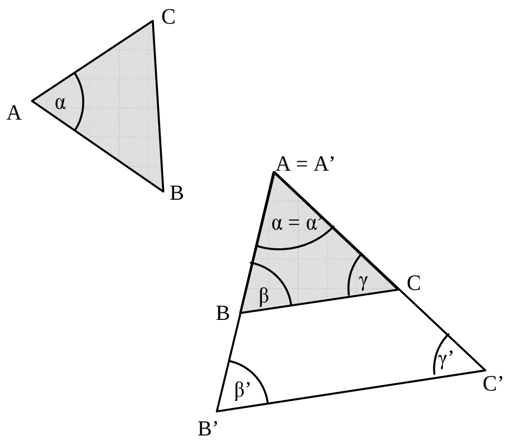
Definition:
Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn sie in allen **Winkeln** und allen **Streckenverhältnissen** übereinstimmen.

Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 21

Satz und Definition:
Zwei Figuren sind ähnlich, wenn sie durch **Kongruenzabbildungen** (**Verschiebung**, **Drehung**, **Spiegelung**) oder **zentrische Streckung** ineinander überführt werden können. Die zentrische Streckung heißt daher auch **Ähnlichkeitsabbildung**.

Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 22

Satz
Zwei **Dreiecke** sind schon ähnlich, wenn sie in allen **Winkeln** übereinstimmen.



Beweis:
Wegen α' = α können die Dreiecke durch Kongruenzabbildungen ineinander gelegt werden, so dass die Punkte A und A' sowie die angrenzenden Seiten b und b' bzw. c und c' aufeinander liegen. Da die Stufenwinkel β und β' gleich sind, müssen die Seiten a und a' ebenfalls parallel sein. Durch eine zentrische Streckung des Dreiecks ABC an A um den Faktor $k = \frac{b'}{b}$ erhält man dann das Dreieck A'B'C', denn die Winkel bleiben dabei unverändert.

Übungen: Aufgaben zu Ähnlichkeitsabbildungen Nr. 23 - 30