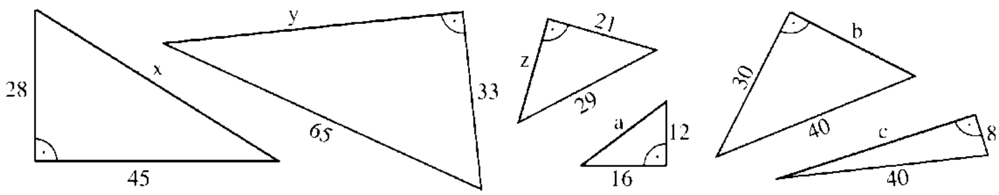
2.8. Aufgaben zum Satz des Pythagoras

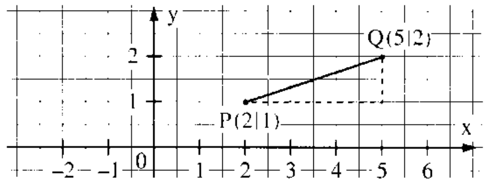
Aufgabe 1
Vervollständige die folgende Tabelle:

Kathete a	6	12		24	12	13	17	15
Kathete b	8		21	7	8	11		
Hypotenuse c		13	29				19	17

Aufgabe 2
Berechne jeweils die Länge der dritten Seite:



Aufgabe 3
Zeichne die Punkte P und Q jeweils in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm ein und bestimme ihren Abstand durch Zeichnung und Rechnung.



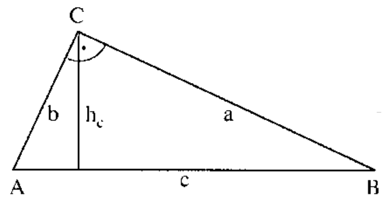
a) P(2|1) und Q(5|5) b) P(−3|4) und Q(2|−1)

c) P(−3|−1) und Q(0|4) d) P(3|0) und Q(−4|0)

Aufgabe 4
Ein Gerade hat eine Steigung von 20 % = $\frac{20}{100}$, wenn sie auf 100 m einen Höhenunterschied von 20 m bewältigt.

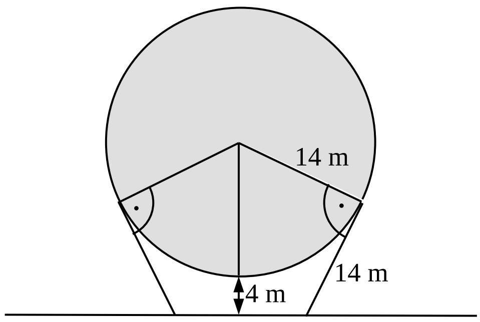
a) Welche konstante Steigung müsste eine Straße haben, die einen Höhenunterschied von 157 m auf einer Strecke von 1800 m überwindet?
b) Wie lange wäre eine Straße mindestens, die bei maximal 10 % Steigung einen Höhenunterschied von 157 m überwindet?

Aufgabe 5
Berechne den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ABC mit



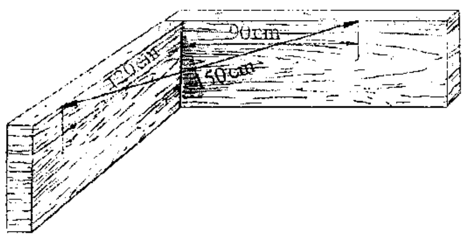
a) a = 7,2 cm und b = 5,4 cm
b) c = 8,0 cm und h_c = 4,5 cm
c) a = 4,5 cm und c = 7,5 cm
d) b = 2,4 cm und c = 4,0 cm

Aufgabe 6
Die Kugel eines Gaskessels hat einen Radius von 14 m. Sie soll durch ebenfalls 14 m lange Streben gehalten werden, welche die Kugel berühren. Der tiefste Punkt der Kugel soll 4 m über dem waagerechten Erdboden liegen. Berechne den Abstand der Punkte A_1 und A_2 in dem die Streben in der Erde befestigt werden.



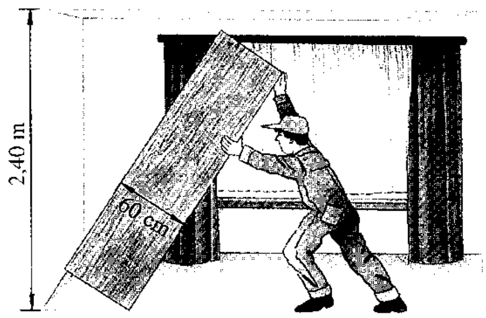
Hinweis: Verbinde die Ecken des rechten Vierecks, so dass du zwei rechtwinklige Dreiecke erhältst.

Aufgabe 7
Um zwei sich berührende Leisten rechtwinklig auszurichten, misst der Tischler auf der einen Leiste 90 cm und auf der anderen 120 cm ab und markiert diese Stellen. Dann werden die beiden Leisten so ausgerichtet, dass die Markierungen 150 cm Abstand haben. Erkläre dieses Verfahren.



Aufgabe 8
Vervollständige die Tabelle für ein Rechteck mit den Seiten a und b, der Diagonale d und dem Flächeninhalt A:

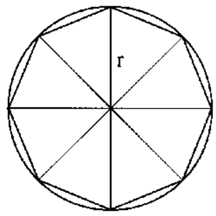
a	3,6 cm	2,5 cm	
b	2,5 cm		1,5 dm
d		36 mm	
A			240 cm^2



Aufgabe 9
Wie hoch darf ein Schrank höchstens sein, damit man ihn wie rechts abgebildet durch Kippen aufstellen kann?

Aufgabe 10
Vervollständige die Tabelle für ein Quadrat mit der Seite a, der Diagonale d und dem Flächeninhalt A:

a	52 cm			a		
d		47 m			d	
A			34 cm^2			A



Aufgabe 11
Einem Kreis mit Radius r wird ein regelmäßiges Achteck einbeschrieben. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Achtecks.
Hinweis: Zeichne ein Quadrat in das Achteck.

Aufgabe 12
Vervollständige die Tabelle für ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln a, der Basis c, der Höhe h und dem Flächeninhalt A:

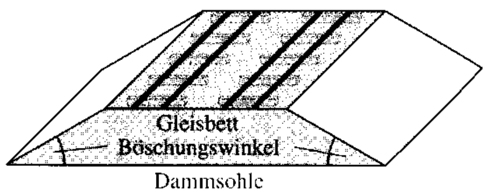
a	2,4 cm	4,2 cm				
c	1,8 cm		2,8 dm	3,8 cm	22 m	
h		3,4 cm	5,4 dm			19,3 dm
A				477 mm^2	2700 dm^2	0,8 m^2

Aufgabe 13
Vervollständige die Tabelle für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, der Höhe h und dem Flächeninhalt A:

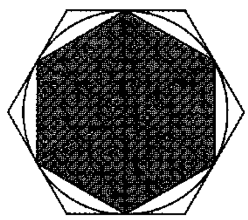
a	24 cm				
h		98 mm		h	
A			4,6 m^2		A

Aufgabe 14
a) Welchen Flächeninhalt hat ein gleichseitiges Dreieck mit dem Umfang 1 m ?
b) Welchen Flächeninhalt hat ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe 1 m ?
c) Welchen Umfang hat ein gleichseitiges Dreieck mit Flächeninhalt 1 m^2 ?
d) Welchen Umfang hat ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe l m ?

Aufgabe 15
Beim Bau von Eisenbahnstrecken werden Unebenheiten des Geländes oft durch Dämme ausgeglichen. Ein 6,5 m hoher Damm mit einem Böschungswinkel von 30° soll am Gleisbett 13,7 m breit sein. Wie breit muss die Dammsohle gewählt werden ?



Aufgabe 16
Einem Kreis mit Radius r wird ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben und ein regelmäßiges Sechseck umbeschrieben.
a) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt beider Sechsecke in Abhängigkeit vom Radius r.
b) Um wie viel Prozent ist der Umfang (Flächeninhalt) des einbeschriebenen Sechsecks kleiner als beim umbeschriebenen?



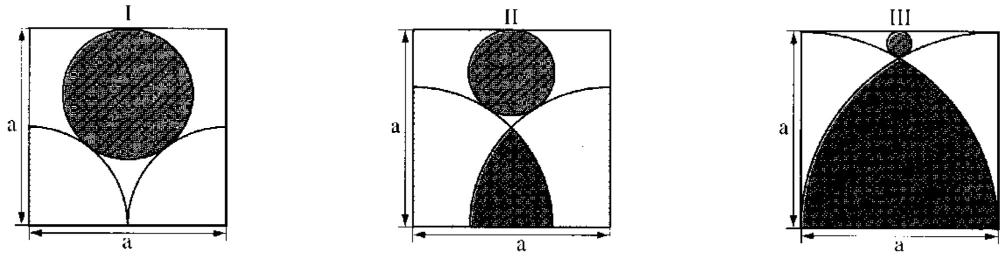
Aufgabe 17

a) Zeichne zwei Kreise mit den Radien 3 cm und 4 cm, deren Mittelpunkte 6 cm voneinander entfernt sind. Konstruiere mit dem Satz des Thales eine gemeinsame Tangente beider Kreise einschließlich ihrer Berührpunkte P und Q. Berechne die Länge der Strecke PQ.

b) Löse a), wenn die beiden Kreismittelpunkte 9 cm voneinander entfernt sind und die Tangente die Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte schneidet.

Aufgabe 18

Berechne in den achsensymmetrischen Figuren 1, 11 und 111 den Radius des dunklen Kreises in Abhängigkeit von a. Die Viertelkreise in Figur 11 gehen durch den Mittelpunkt des Quadrates.

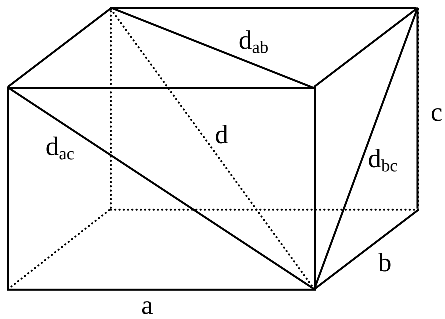


Aufgabe 19

Berechne die drei Flächendiagonalen d_{ab}, d_{bc} und d_{ac} eines Quaders mit den folgenden Maßen:

a) a = 4 cm, b = 5 cm und c = 6 cm

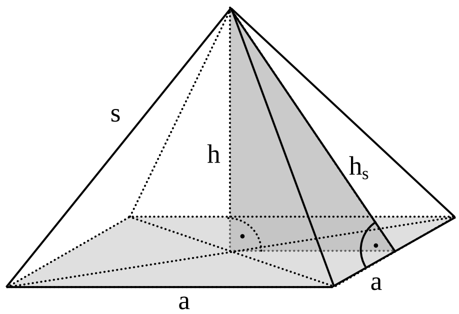
b) a = 2 cm, b = 4 cm und c = 6 cm



Aufgabe 20

Die rechts abgebildete Pyramide hat eine **quadratische** Grundfläche mit der Seitenlänge a. Die schrägen Seitenflächen haben die Seitenlänge s und die Seitenhöhe h_s. Die Höhe der Pyramide ist h. Alle Maßangaben sind in cm. Vervollständige die Tabelle.

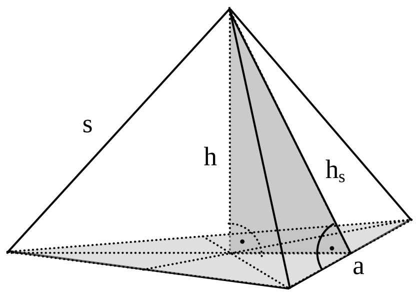
a	4	6	4	6			
s				5	5	6	
h_s			3			5	6
h	5	3			4		5



Aufgabe 21

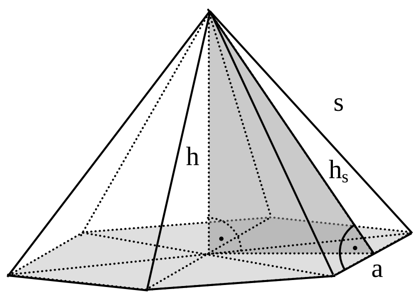
Die rechts abgebildete Pyramide hat ein **gleichseitiges Dreieck** mit der Seitenlänge a als Grundfläche. Die schrägen Seitenflächen haben die Seitenlänge s und die Seitenhöhe h_s. Die Höhe der Pyramide ist h. Alle Maßangaben sind in cm. Vervollständige die Tabelle.

a	6	6	6	6			
s				5	5	5	
h_s			5			4	5
h	5	3			4		4



Aufgabe 22

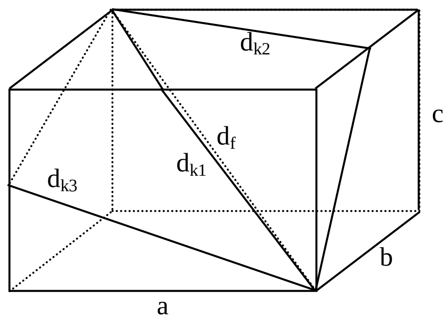
Die rechts abgebildete Pyramide hat ein **regelmäßiges Sechseck** mit der Seitenlänge a als Grundfläche. Die schrägen Seitenflächen haben die Seitenlänge s und die Seitenhöhe h_s. Die Höhe der Pyramide ist h. Alle Maßangaben sind in cm. Vervollständige die Tabelle.



a	4	4	4	4			
s				6	5	6	
h_s			5			5	8
h	5	3			4		7

Aufgabe 23

Eine Fliege sitzt in der rechten unteren Ecke eines Schuhkartons mit den Maßen a = 40 cm, b = 30 cm und c = 20 cm. Berechne die Länge der möglichen Krabbelstrecken d_{k1}, dk_2 und d_{k3} sowie der Flugstrecke d_s zur gegenüberliegenden Ecke.



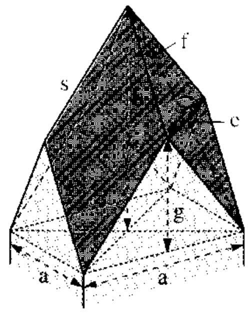
Aufgabe 24

Beim rheinischen Rautendach bestehen die Dachflächen eines Gebäudes mit quadratischer Grundfläche aus kongruenten Rauten.

a) Berechne nacheinander in Abhängigkeit von a und g die Längen s, e und f und zeige, dass h = 2 g gilt.

b) Weise nach, dass die Dachfläche den Inhalt $A = a\cdot\sqrt{a^2+8g^2}$ hat.

c) Können die vier Rauten der Dachfläche Quadrate sein?

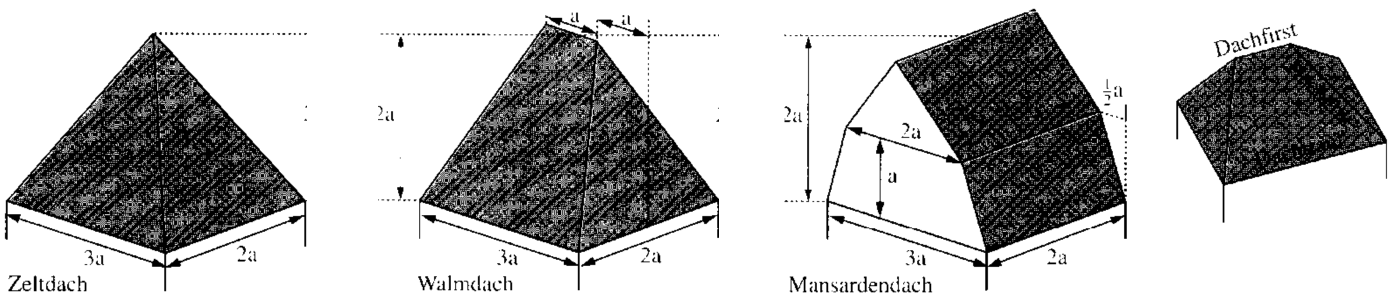


Aufgabe 25

Ein Gebäude hat eine rechteckige Grundfläche mit den Seitenlängen 2a und 3 a, die Höhe des Daches ist 2 a. Bei den abgebildeten Dächern sind gegenüber liegende Flächen kongruent. Bestimme für diese Dächer

a) den Flächeninhalt der gesamten Dachfläche

b) die gesamte Länge der Dachkanten (d. h. des Dachfirstes und der Dachgrate).



2.8. Lösungen zu den Aufgaben zum Satz des Pythagoras

Aufgabe 1

Kathete a	6	12	**20**	24	12	13	17	15
Kathete b	8	**5**	21	7	8	11	$\mathbf{6}\sqrt{2}$	**8**
Hypotenuse c	**10**	13	29	**25**	$\mathbf{4}\sqrt{13}$	$\sqrt{290}$	19	17

Aufgabe 2

$x = 53$, $y = 56$, $z = 29$, $a = 20$, $b = 10\sqrt{7}$, $c = 16\sqrt{6}$

Aufgabe 3

a) $\overline{PQ} = 5$ cm b) $\overline{PQ} = 5\sqrt{2}$ cm c) $\overline{PQ} = \sqrt{34}$ cm d) $\overline{PQ} = 7$ cm

Aufgabe 4

a) Die Steigung müsste 8,76 % betragen

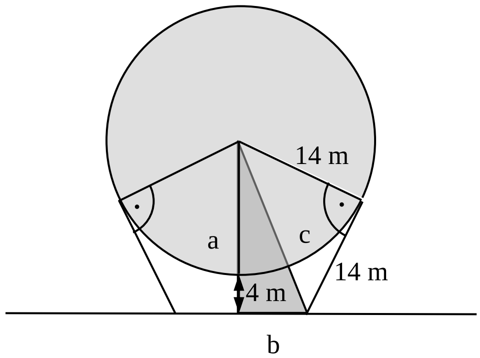
b) Die Straße wäre mindestens 1,58 km lang

Aufgabe 5

a) $A = 19{,}44\ cm^2$ b) $A = 18\ cm^2$ c) $b = 6$ cm $\Rightarrow$ $A = 13{,}5\ cm^2$ d) $a = 3{,}2$ cm $\Rightarrow$ $A = 5{,}12\ cm^2$

Aufgabe 6

In dem dunklen Dreieck gilt für die Hypotenuse $c^2 = 14^2 + 14^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}\cdot 14$ m. Eine Kathete ist $a = 4 + 14 = 18$ m lang. Für die andere Kathete gilt $b^2 = c^2 - a^2 = 2\cdot 14^2 - 18^2 = 68 \Rightarrow b = \sqrt{68}$ m $= 2\sqrt{17}$ m. Der gesuchte Abstand ist $2\cdot b = 4\sqrt{17}$ m $\approx 16{,}5$ m



Aufgabe 7

$120^2 + 90^2 = 150^2$.

Aufgabe 8

a	3,6 cm	2,5 cm	**1,6 dm**
b	2,5 cm	**1,05 cm**	1,5 dm
d	**4,38 cm**	36 mm	**2,19 dm**
A	$\mathbf{9\ cm^2}$	$\mathbf{2{,}62\ cm^2}$	$240\ cm^2$

Aufgabe 9

Der Schrank darf höchstens 2,32 m hoch sein.

Aufgabe 10

a	52 cm	**33,23 m**	**5,83 cm**	a	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,d$	$\sqrt{A}$
d	**73,54 cm**	47 m	**8,25 cm**	$\sqrt{2}\,a$	d	$\sqrt{2A}$
A	$\mathbf{27{,}04\ dm^2}$	**11,04 a**	$34\ cm^2$	a^2	$\frac{1}{2}d^2$	A

Aufgabe 11

Wegen des Mittelpunktwinkels 45° ist das Dreieck BCM gleichschenklig und rechtwinklig

$\Rightarrow\ \overline{CM} = \overline{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,r \Rightarrow \overline{AC} = r - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,r$ und $\overline{AM} = r$.

Im rechtwinkligen Dreieck ACB gilt für die Hypotenuse

$\overline{AB}^{\,2} = \overline{AC}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2} = (2 - \sqrt{2})r^2$.

Im rechtwinkligen Dreieck AMD gilt für die Kathete

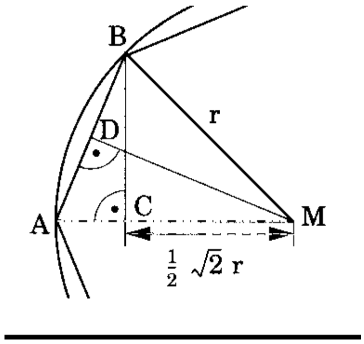
$\overline{DM}^{\,2} = \overline{AM}^{\,2} - (\frac{1}{2}\overline{AB})^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})r^2$.

Das Achteck hat also den Umfang

$u = 8\,\overline{AB} = 8\sqrt{2-\sqrt{2}}\;r \approx 6{,}12\;r$

und den Flächeninhalt

$A = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{DM} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}\;r^2 \approx 2{,}83\;r^2$.



Aufgabe 12

a	2,4 cm	4,2 cm	**5,58 dm**	**3,15 cm**	**11,27 m**	**19,74 dm**
c	1,8 cm	**4,93 cm**	2,8 dm	3,8 cm	22 m	**8,29 dm**
h	**2,22 cm**	3,4 cm	5,4 dm	**2,51 cm**	**2,45 m**	19,3 dm
A	**2,00 cm²**	**8,38 cm²**	**7,56 dm²**	477 mm²	2700 dm²	0,8 m²

Aufgabe 13

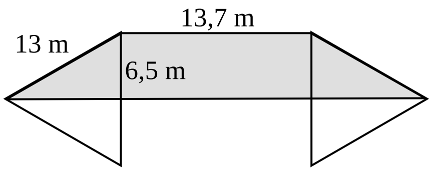
a	24 cm	11,32 cm	3,26 m	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\,h$	$2\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3}A}$
h	20,78 cm	98 mm	2,82 m	h	$\sqrt{\sqrt{3}A}$
A	2,49 dm²	55,4 cm²	4,6 m²	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\,h^2$	A

Aufgabe 14

a) $A = 4{,}8$ dm² b) $A = 57{,}7$ dm² c) $u = 4{,}56$ m d) $u = 3{,}46$ m

Aufgabe 15

Wegen des Steigungswinkels von 30 ° sind die beiden Dreiecke in der Skizze gleichseitig und habeneine Höhe von $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 13\text{m} \approx 11{,}26$ m. Die Breite der Dammsohle muss $2\cdot 11{,}26$ m + 13,7 m = 36,3 m betragen.



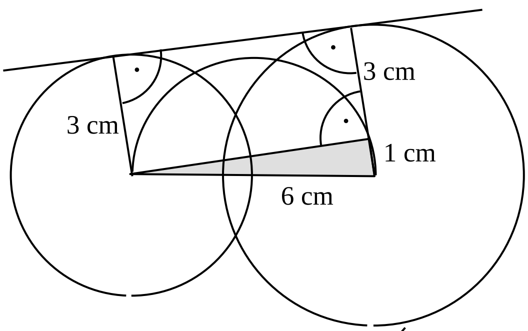
Aufgabe 16

Einbeschriebenes Sechseck: $u = 6r$ und $A = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,r^2 \approx 2{,}6\,r^2$.

Umbeschriebenes Sechseck:

$u = 4\sqrt{3}\,r \approx 6{,}93\,r$ und $A = 2\sqrt{3}\,r^2 \approx 3{,}46\,r^2$.

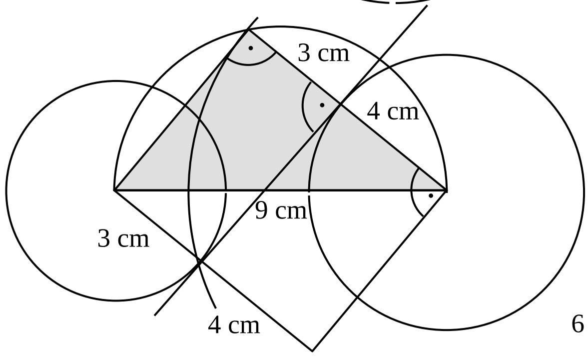
Der Umfang ist also um 13,4 % kleiner und der Flächeninhalt ist um 25 % kleiner



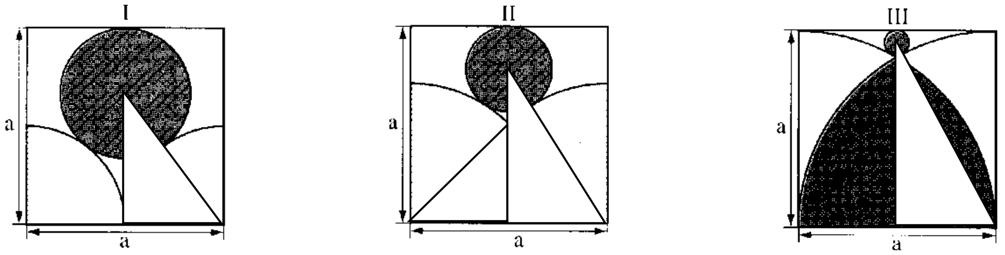
Aufgabe 17

a) Konstruiere zunächst das graue rechtwinklige Dreieck mit dem Thaleskreis um die Verbindungsstrecke der beiden Mittelpunkte. Der Abstand der Berührpunkte ist die Kathete des grauen Dreiecks: $d^2 = 6^2 - 1^2 = 35 \Rightarrow d = \sqrt{35} \approx 5{,}92$ cm.

b) Konstruiere zunächst das graue rechtwinklige Dreieck mit dem Thaleskreis um die Verbindungsstrecke der beiden Mittelpunkte. Der Abstand der Berührpunkte ist die Kathete des grauen Dreiecks: $d^2 = 9^2 - 7^2 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32} \approx 5{,}66$ cm.



Aufgabe 18



Figur I: $(r + \frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (a - r)^2 \Rightarrow 3ar = a^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3}a$.

Figur II: $(r + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a)^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (a - r)^2 \Rightarrow (2 + \sqrt{2})ar = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow r = \frac{3}{8}(2 - \sqrt{2})a \approx 0,22\,a$.

Figur III: $(r + a)^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (a - r)^2 \Rightarrow 4ar = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow r = \frac{1}{16}a$.

Aufgabe 19

	a)	b)
$d_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2}$	6,40 cm	4,47 cm
$D_{bc} = \sqrt{b^2 + c^2}$	7,81 cm	7,21 cm
$d_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2}$	7,21 cm	6,32 cm

Aufgabe 20

a	4	6	4	6	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{11}$	$2\sqrt{11}$
s	$\sqrt{33}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{13}$	5	5	6	$\sqrt{47}$
h_s	$\sqrt{29}$	$\sqrt{18}$	3	4	$2\sqrt{13}$	5	6
h	5	3	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	4	$\sqrt{14}$	5

Aufgabe 21

a	6	6	6	6	4,5	6	9
s	$\sqrt{31}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{34}$	5	5	5	$\sqrt{45,25}$
h_s	$\sqrt{28}$	$2\sqrt{3}$	5	4	$\sqrt{22,75}$	4	5
h	5	3	$\sqrt{22}$	$\sqrt{13}$	4	$2\sqrt{3}$	4

Aufgabe 22

a	4	4	4	4	3	$\sqrt{11}$	$2\sqrt{5}$
s	$\sqrt{41}$	5	$\sqrt{29}$	6	5	6	$\sqrt{69}$
h_s	$\sqrt{37}$	$\sqrt{21}$	5	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{22,75}$	5	8
h	5	3	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{11}$	4	$\sqrt{16,75}$	7

Aufgabe 23

$d_{k1} = \sqrt{(20+30)^2+40^2} = 10\sqrt{31}$ cm ≈ 54,77 cm

$d_{k2} = \sqrt{(20+40)^2+30^2} = 30\sqrt{5}$ cm ≈ 67,08 cm

$d_{k3} = \sqrt{(30+40)^2+20^2} = 10\sqrt{53}$ cm ≈ 72,80 cm

$d_s = \sqrt{20^2+30^2+40^2} = 10\sqrt{29}$ cm ≈ 53,85 cm

Aufgabe 24

a) Mit $s = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4g^2}$ und $e = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ a sowie $f = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+16g^2}$ erhält man

$h = \sqrt{f^2+e^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2+4g^2-\frac{1}{2}a^2} = 2g.$

b) Der Inhalt der Dachfläche ist $A = 4\cdot\frac{1}{2}ef = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+16g^2} = a\cdot\sqrt{a^2+8g^2}$

c) Wenn die vier Rauten Quadrate wären, müsste e = f und wegen a) dann auch h = 0 sein. Dann wäre das Dach aber ein waagrechtes Flachdach und kein rheinisches Rautendach!

Aufgabe 25

a) Zeltdach: $A = 3\sqrt{5} + 5)a^2 \approx 11{,}7\,a^2$.

Walmdach: $A = 6\sqrt{5}\,a^2 \approx 13{,}4\,a^2$.

Mansardendach: $A = (4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})a^2 \approx 10{,}1\,a^2$

b) Zeltdach: $l = 2\sqrt{29}\,a \approx 10{,}8$ a.

Walmdach: $l = (4\sqrt{6} + 1)a \approx 10{,}8$ a.
Mansardendach: l = 6a