2.8. Prüfungsaufgaben zum Satz des Pythagoras

Aufgabe 1: Rechtwinkliges Dreieck
Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete a = 0,5 m hat die Fläche A = 2000 cm^2. Berechne die restlichen Seitenlängen dieses Dreiecks.

Lösung

2000 cm^2 = $\frac{1}{2}\cdot 50$ cm·b ⇒ b = 80 cm und c = $\sqrt{(50\text{ cm})^2+(80\text{ cm})^2}$ =≈ 9,43 cm

Aufgabe 2: Raute
Eine Raute hat die Diagonalen e = 6 cm und f = 8 cm. Berechne den Umfang des Drachens.

Lösung

u = $4\cdot\sqrt{(3\text{ cm})^2+(4\text{ cm})^2}$ = 20 cm

Aufgabe 3: Abstände (2)
Berechne den Abstand der Punkte P(2 | 3) und Q(4 | 5)

Lösung

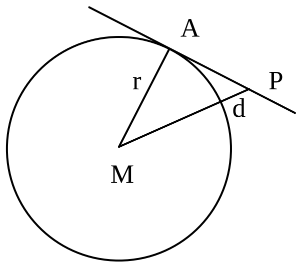
$\overline{PQ} = \sqrt{(5-3)^2+(4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Aufgabe 4: Abstände (2)
Berechne den Abstand der Punkte P(4 | 5) und Q(6 | 8)

Lösung

$\overline{PQ} = \sqrt{(8-5)^2+(6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Aufgabe 5: Tangenten (2)
Im Punkt A eines Kreises um M mit Radius r = 3 cm wird eine Tangente gezeichnet. Auf der Tangente wird der Punkt P markiert. Wie groß muss die Entfernung $\overline{AP}$ sein, damit P einen Abstand von d = 1 cm zum Kreis hat?

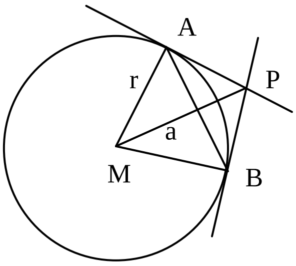


Lösung

$(r + d)^2 = r^2 + \overline{AP}^2 \Leftrightarrow \overline{AP} = \sqrt{(r+d)^2-r^2} = \sqrt{2dr+d^2} = \sqrt{7}$ cm ≈ 2,65 cm (2)

Aufgabe 6: Tangenten
Im Punkt A eines Kreises um M mit Radius r = 3 cm ist eine Tangente gezeichnet und auf ihr in der Entfernung $\overline{AP}$ = 4 cm der Punkt P markiert. Die zweite Kreistangente durch P berühre den Kreis in B.

a) Berechne $\overline{MP}$.
b) Welchen Abstand a hat die Berührpunktssehne [AB] vom Kreismittelpunkt M?
c) Berechne $\overline{AB}$.
d) Wie muss P auf der Kreistangente durch A gewählt werden, damit das Dreieck MPA gleichseitig wird? Rechne allgemein mit den Größen r und AP = t!



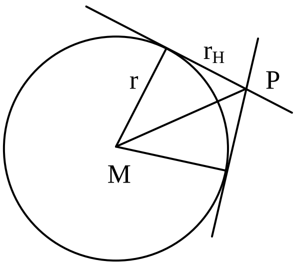
Lösung

a) Pythagoras: $\overline{MP} = \sqrt{r^2 + \overline{AP}^2} = 5$ cm.

b) Kathetensatz: $r^2 = a \cdot \overline{MP} \Leftrightarrow a = \frac{r^2}{\overline{MP}} = 1{,}8$ cm

c) Pythagoras: $r^2 = a^2 + (\frac{1}{2}\overline{AB})^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{r^2 - a^2} = 4{,}8$ cm

Aufgabe 7: Tangenten
Ein Fesselballon schwebt h = 4000 m über dem Meeresspiegel. Welchen Radius r_H hat der vom Ballon aus sichtbare Horizont bei vollkommen klaren Sichtverhältnissen? Der Radius der Erde ist r = 6370 km.

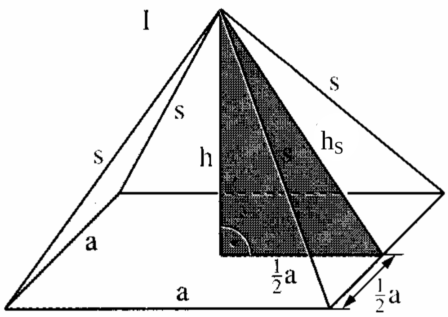


Lösung

$(r + h)^2 = r^2 + r_H^2 \Leftrightarrow r_H = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2hr + h^2} \approx 225{,}8$ km

Aufgabe 8: Pyramiden (2)
Gegeben ist eine Pyramide, deren Grundseite ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist. Die Höhe der Pyramide soll h = 5 m sein und die Höhe der Seitenflächen soll h_S = 6 m sein. Berechne auf 2 Nachkommastellen genau

a) die Länge a der Grundfläche.
b) die Kantenlänge s



Lösung

a) $h_S^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{h_S^2 - h^2} = 2\sqrt{11}$ m ≈ 6,63 m (1)

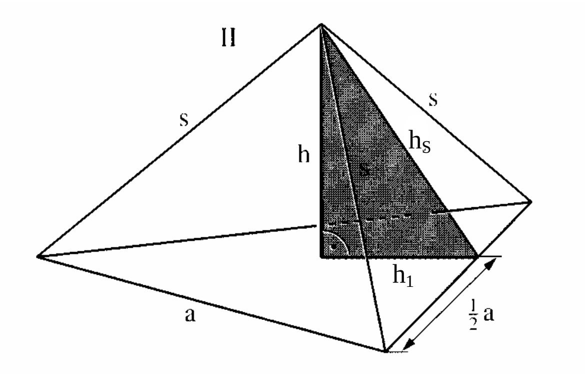
b) $s^2 = h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{47}$ m ≈ 6,85 m (1)

Aufgabe 9: Pyramiden (3)

Gegeben ist eine Pyramide, deren Grundseite ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 4 m ist. Die Kantenlänge der Pyramide soll s = 6 m sein. Berechne nacheinander

a) die Höhe h_S der Seiteflächen
b) den Abschnitt h_1 der Höhe des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche
c) die Höhe h der Pyramide

auf 2 Nachkommastellen genau. Hinweis: Die Höhen (=Seitenhalbierenden) in einem gleichseitigen Dreieck schneiden sich im Verhältnis 2:1.



Lösung

a) $s^2 = h_S^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h_S = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{32}$ m ≈ 5,66 m (1)

b) $h_1 = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m ≈ 1,15 m (1)

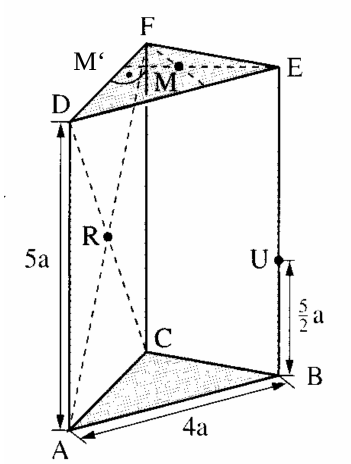
c) $h_S^2 = h^2 + h_1^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{h_S^2 - h_1^2}$ ≈ 5,53 m (1)

Aufgabe 10: Prismen (5)

In dem unten gezeichneten Prisma sind ABC und DEF gleichseitige Dreiecke. Die Vierecke ABED, BCFE und ACFD sind Rechtecke. M ist der Mittelpunkt des Dreieckes ABC. Bestimme die Längen

a) der Strecke AM‘ (2)
b) der Strecke AM (3)

für a = 2 cm und für beliebiges a ∈ ℝ



Lösung

a) $\overline{AM'} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DM'}^2} = \sqrt{(5a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{29}\ a \approx 10{,}77$ cm für a = 2 cm (2)

b) M'M ist der kleinere Abschnitt der Höhe des gleichseitigen Dreiecks DEF mit der Kantenlänge 4 a und hat daher die Länge $\overline{M'M} = \frac{4}{\sqrt{6}}$ a. (1)

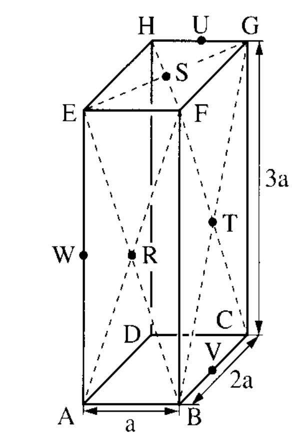
$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AM'}^2 + \overline{M'M}^2} = \sqrt{29a^2 + \frac{(4a)^2}{6}} = \sqrt{31\frac{2}{3}}\ a \approx 11{,}25$ cm für a = 2 cm (2)

Aufgabe 11: Quader (6)

Bei dem rechts gezeichneten Quader sind R, S und T Mittelpunkte von Seitenflächen und U, V und W Mittelpunkte von Kanten. Bestimme die Längen

a) der Strecke ES
b) der Strecke AS
c) der Strecke UC
d) der Strecke UV

für a = 2 cm und für beliebiges $a \in \mathbb{R}$



Lösung

a) $\overline{ES} = \sqrt{\overline{HU}^2 + \overline{US}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ a \approx 2{,}23$ cm für a = 2 cm (2)

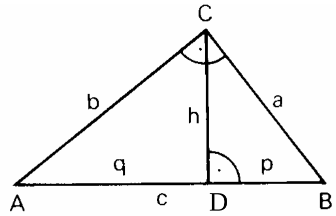
b) $\overline{AS} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{ES}^2} = \sqrt{(3a)^2 + \frac{5}{16}a^2} = \sqrt{9 + \frac{5}{4}}\ a \approx 6{,}40$ cm für a = 2 cm (2)

c) $\overline{UC} = \sqrt{\overline{UG}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3a)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{4}}\ a \approx 6{,}08$ cm für a = 2 cm (2)

d) $\overline{UV} = \sqrt{\overline{UC}^2 + \overline{CV}^2} = \sqrt{(9 + \frac{1}{4})a^2 + a^2} = \sqrt{10 + \frac{1}{4}}\ a \approx 3{,}20$ cm für a = 2 cm (2)

Aufgabe 12: Beweisaufgabe (5)

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck:



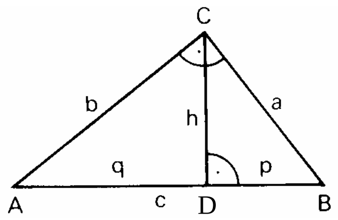
a) Formuliere des Satz des Pythagoras für die Dreiecke ABC, DBC und ADC. (2)
b) Berechne die Höhe h in Abhängigkeit von den Hypothenusenabschnitten p und q. Hinweis: Eliminiere die drei Größen a, b und c in den drei Gleichungen aus a) mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens. Das Ergebnis ist $h = \sqrt{p \cdot q}$ (3)

Lösung

a) (1) $c^2 = a^2 + b^2$
(2) $a^2 = h^2 + p^2$
(3) $b^2 = h^2 + q^2$ (2)

b) (2) und (3) in (1) einsetzen: $c^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2$. (1)
(4) $c = p + q$ (1)
(4) ebenfalls einsetzen: $(p + q)^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2 \Leftrightarrow 2h^2 = (p + q)^2 - p^2 - q^2 = 2pq \Leftrightarrow h = \sqrt{p \cdot q}$ (1)

Aufgabe 13: Beweisaufgabe (6)
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck:



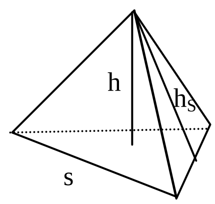
a) Formuliere des Satz des Pythagoras für die Dreiecke ABC, DBC und ADC. (2)
b) Berechne die Kathete a in Abhängigkeit von der Hypothenuse c und dem Hypothenusenabschnitt p. Hinweis: Eliminiere die drei Größen h, b und q in den drei Gleichungen aus a) mit Hilfe des Einsetzungs- oder Gleichsetzungsverfahrens. Das Ergebnis ist a = $\sqrt{c \cdot p}$ (4)

Lösung

a) (1) $c^2 = a^2 + b^2 \quad\Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2$
(2) $a^2 = h^2 + p^2 \quad\Leftrightarrow h^2 = a^2 - p^2$
(3) $b^2 = h^2 + q^2 \quad\Leftrightarrow h^2 = b^2 - q^2$ (2)

b) (4) $c = p + q \quad\Leftrightarrow q = c - p$ (1)
(2) und (3) gleichsetzen: $a^2 - p^2 = b^2 - q^2$
(4) ebenfalls einsetzen: $a^2 - p^2 = b^2 - (c - p)^2$
(1) ebenfalls einsetzen: $a^2 - p^2 = c^2 - a^2 - (c - p)^2 \Leftrightarrow 2a^2 = c^2 + p^2 - (c - p)^2 = 2cp \Leftrightarrow a = \sqrt{c \cdot p}$ (3)

Aufgabe 14: Tetraeder (9)
Ein Tetraeder ist eine Pyramide (siehe Skizze), die aus vier gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Berechne die Seitenhöhe h_S und die Höhe h eines Tetraeders mit der Seitenlänge s = 6 cm.



Lösung

$$h_S^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_S = \frac{\sqrt{3}}{2} s = \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm}$$

$$h^2 + \left(\frac{h_S}{3}\right)^2 = h_S^2 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{2}}{3} h_S = \sqrt{\frac{2}{3}} s = \sqrt{6} \cdot 2 \text{ cm.}$$