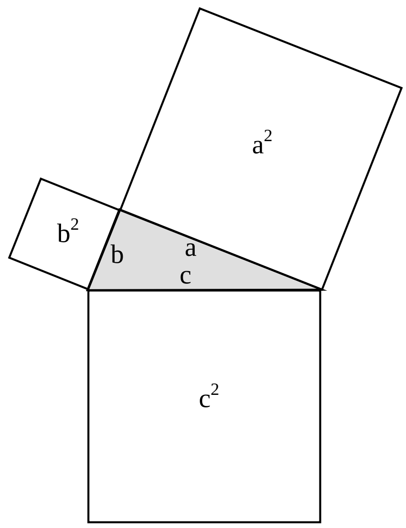
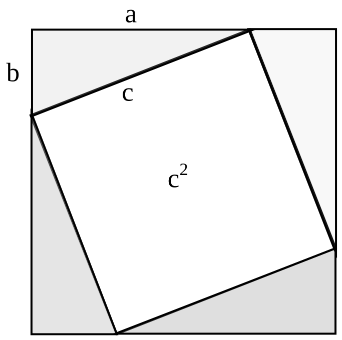
2.8. Der Satz des Pythagoras

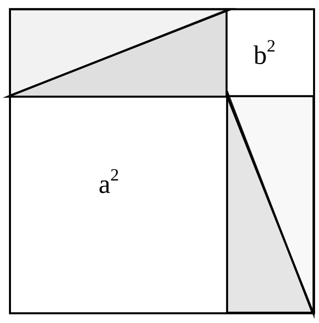
2.8.1. Der Satz des Pythagoras

Satz des Pythagoras:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, **dann** ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat: $c^2 = a^2 + b^2$.

Beweis:
Wenn man an den Ecken eines Quadrates vier gleiche (**kongruente**) rechtwinklige Dreiecke abschneidet, hat das restliche Quadrat den Flächeninhalt c^2. Durch Umordnen der Dreiecke erhält man zwei Restquadrate mit den Flächen a^2 und b^2, die die gleiche Fläche einnehmen wie das ursprüngliche Quadrat: $c^2 = a^2 + b^2$.





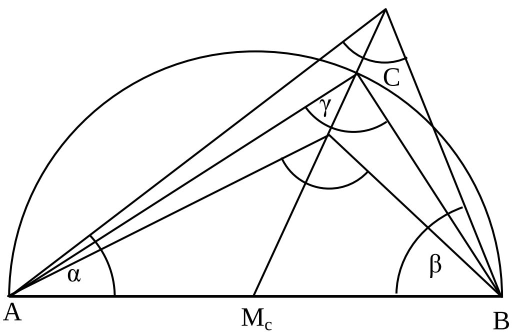


Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 1 - 6

2.8.2. Umkehrung des Satzes des Pythagoras:

Satz:
Wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, **dann** ist es rechtwinklig.

Beweis:
Betrachte wieder die Figur für den Beweis der Umkehrung des Satzes des Thales: Falls $\gamma < 90°$ ist, liegt C **außerhalb** des Thaleskreises. Die Seiten a und b sind **länger** als beim rechtwinkligen Dreieck, d.h. $a^2 + b^2 > c^2$. Falls $\gamma > 90°$ ist, liegt C **innerhalb** des Thaleskreises. und die Seiten a und b sind **kürzer** als beim rechtwinkligen Dreieck, d.h. $a^2 + b^2 < c^2$. Da nach Voraussetzung aber $a^2 + b^2 = c^2$ gelten soll, muss C genau auf dem Thaleskreis liegen, d.h. $\gamma = 90°$.

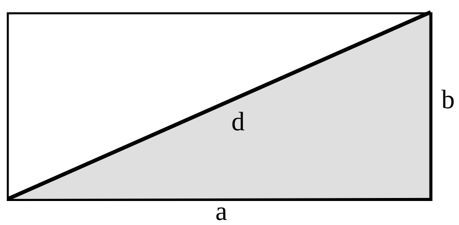


Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 7

2.8.3. Diagonale eines Rechtecks

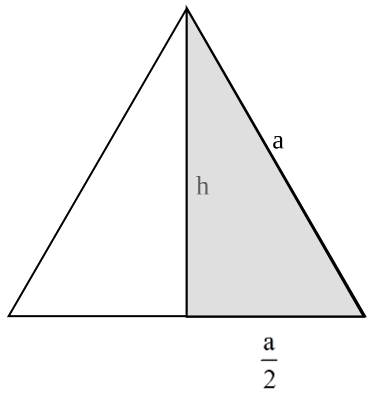
Satz:
Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat die Diagonale d = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Beweis:
Nach Pythagoras ist $d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 8 - 11

2.8.4. Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks



Satz:
Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a besitzt
die Höhe h = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ a und den Flächeninhalt A = $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ a^2.

Beweis:

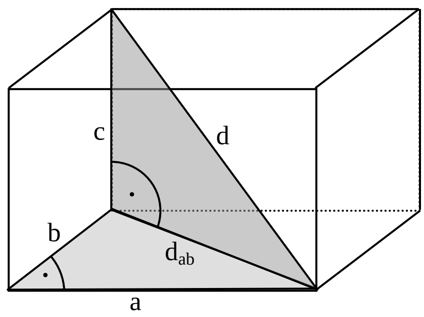
Nach Pythagoras ist $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$ und $A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$.

Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 12 - 18

2.8.5. Raumdiagonale eines Quaders

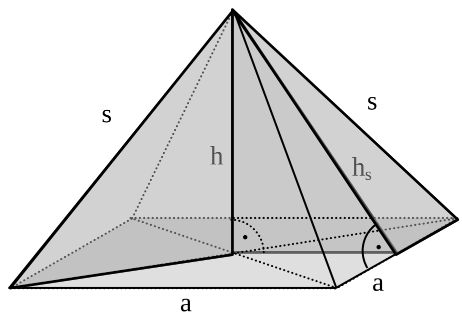
Satz:
Ein **Quader** mit den Kantenlängen a, b, und c besitzt
die **Raumdiagonale** d = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Beweis:
Nach Pythagoras ist
die Flächendiagonale (Hypotenuse des hellen Dreiecks)
$d_{ab}^2 = a^2 + b^2$
und
die Raumdiagonale (Hypotenuse des dunklen Dreiecks)
$d^2 = d_{ab}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$\Rightarrow d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

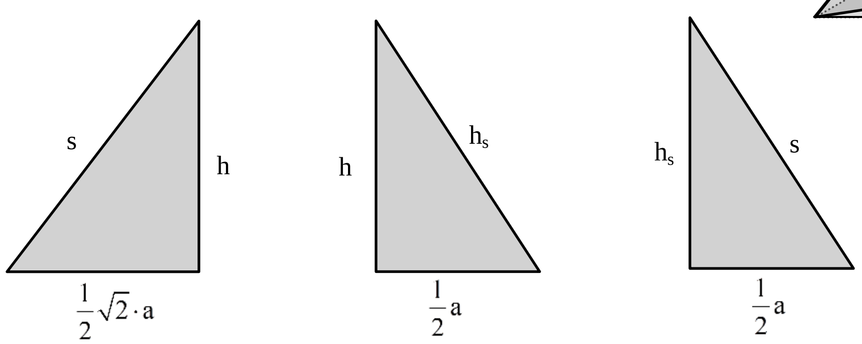
Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 19

2.8.6. Körperberechnungen



Musteraufgabe zu Pyramiden mit quadratischer Grundfläche
Die rechts abgebildete senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die **Seitenhöhe** h_s = 4 und die **Seitenlänge** s = 5.
Berechne die **Höhe** h und die **Grundseitenlänge** a.

Lösung:
In jede senkrechte Pyramide lassen sich **drei rechtwinklige Dreiecke** einzeichnen:



$s^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot a\right)^2 + h^2$ $\qquad$ $h_s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2$ $\qquad$ $s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h_s^2$.

$s^2 = \frac{a^2}{2} + h^2$ $\qquad$ $h_s^2 = \frac{a^2}{4} + h^2$ $\qquad$ $s^2 = \frac{a^2}{4} + h_s^2$.

Durch Einsetzen von $h_s = 4$ und $s = 5$ erhält man

$$25 = \frac{a^2}{2} + h^2 \qquad 16 = \frac{a^2}{4} + h^2 \qquad 25 = \frac{a^2}{4} + 16$$

Die dritte Gleichung lässt sich auflösen:

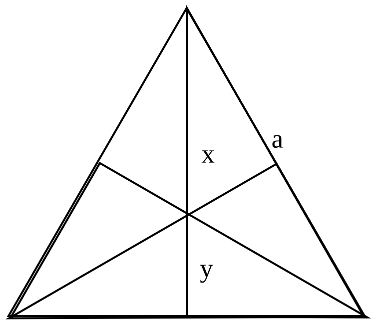
$$9 = \frac{a^2}{4}$$
$$36 = a^2$$
$$\underline{\underline{6 = a}}$$

Durch Einsetzen von a = 6 erhält man aus der zweiten Gleichung:

$$16 = 4 + h^2$$
$$12 = h^2$$
$$\underline{\underline{2\sqrt{3} = h}}$$

Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 20

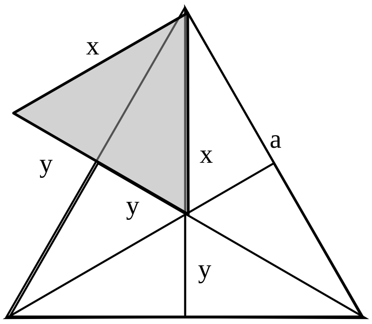
2.8.7. Höhenschnittpunkt eines gleichseitigen Dreiecks



Satz:
Die drei Höhen eine gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt im Verhältnis 2 : 1.

Die Abschnitte sind also $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ und $y = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$.

Beweis:



Durch Ergänzung zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge x sieht man sofort, dass 2y = x

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ und $y = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$.

Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 21 - 25