2.9. Prüfungsaufgaben zu Kreisberechnungen

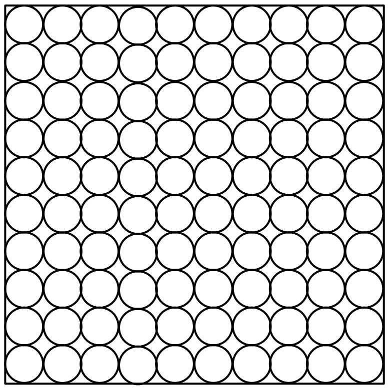
Aufgabe 1a (2)
Eine Schnur wird so über eine Strecke der beliebigen Länge s gelegt, dass sie 40 gleich große aneinander gesetzte Halbkreise bildet. (siehe unten)

Zeige, dass die die Schnur die Länge $\frac{\pi \cdot s}{2}$ haben muss.

Lösung:

Die 40 Halbkreise können zu 20 Kreisen mit dem Durchmesser d = $\frac{s}{40}$ und dem Umfang u = $\pi \cdot d = \pi \cdot \frac{s}{40}$. Die Länge der Schnur ist dann $20 \cdot u = 20 \cdot \pi \cdot \frac{s}{40} = \frac{\pi}{2} \cdot s$.

Aufgabe 1b (2)
Ein Quadrat mit der **beliebigen** Seitenlänge s wird mit 100 gleich großen Kreisen in Zehnerreihen ausgefüllt, so dass jeweils 10 Kreise jede Seite berühren. (siehe rechts)
Zeige, dass die Kreise genau 25π % ≈ 78,5 % der Fläche des Quadrates bedecken.



Lösung:

Jeder Kreis hat den Radius r = $\frac{s}{20}$ und den Flächeninhalt A = $\pi r^2 = \frac{1}{400}\pi s^2$. Alle 100 Kreise bedecken eine Fläche mit dem Inhalt $100 \cdot \frac{1}{400}\pi s^2 = \frac{\pi}{4} s^2$, also $\frac{\pi}{4} \cdot 100$ % = 25π % des Inhaltes s^2 des Quadrates.

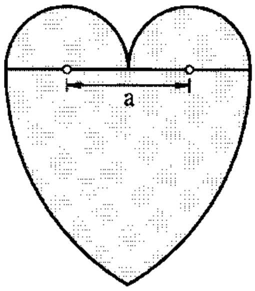
Aufgabe 2a (5)
Ein kleines Beet hat die Form eines 4 m langen Quadrates mit zwei angesetzten Halbkreisen. Um das Beet soll ein 50 cm breiter Weg mit Fliesen zum Preis von 18 €/m^2 belegt werden. Welche Kosten müssen für die Fliesen kalkuliert werden?

Lösung:
Die geraden Strecken haben den Flächeninhalt $A_1 = 2 \cdot 4\text{ m} \cdot 0{,}5\text{ m} = 4\text{ m}^2$. (1)
Die beiden Halbbogen bilden einen Kreisring mit dem Flächeninhalt $A_2 = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2 = \pi \cdot (2{,}5\text{ m})^2 - \pi \cdot (2\text{ m})^2 = \pi \cdot 2{,}25\text{ m}^2 \approx 7{,}07\text{ m}^2$. (2)
Insgesamt hat der Weg einen Flächeninhalt von $A_1 + A_2 \approx 11{,}07\text{ m}^2$. (1)
Die Fliesen kosten mindestens 18·11,07 ≈ 199,26 €. (1)

Aufgabe 2b (5)
Ein kleines Beet hat die Form eines 4 m langen Quadrates mit zwei angesetzten Halbkreisen. Um das Beet soll ein 50 cm breiter Weg angelegt und auf beiden Seiten mit Randsteinen eingefasst werden. Die Randsteine kosten 8 €/m. Welche Kosten müssen für die Randsteine kalkuliert werden?

Lösung:
Die 4 geraden Begrenzungen haben die Länge $l_1 = 4 \cdot 4\text{ m} = 16\text{ m}$. (1)
Die beiden Halbbogen bilden einen Kreisring mit dem Außenbogen $u_a = 2 \cdot \pi \cdot r_a = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5\text{ m} \approx 15{,}71\text{ m}$ und dem Innenbogen $u_i = 2 \cdot \pi \cdot r_a = 2 \cdot \pi \cdot 2\text{ m} \approx 12{,}57\text{ m}$. (2)
Insgesamt haben die Begrenzungen eine Länge von von $l_1 + u_a + u_i \approx 44{,}28\text{ m}$. (1)
Die Randsteine kosten mindestens 8·44,28 ≈ 354,24 €. (1)

Aufgabe 3a: Kreisabschnitte
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:

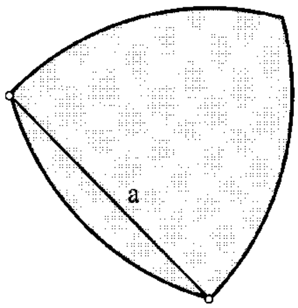


Lösung

$u = 2\pi\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2a = \frac{7}{3}\pi a \approx 7{,}33a$ (2)

$A = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2a)^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(2a)^2 = \left(\frac{19}{12}\pi - \sqrt{3}\right)a^2 \approx 3{,}24a^2$ (3)

Aufgabe 3b: Kreisabschnitte
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:

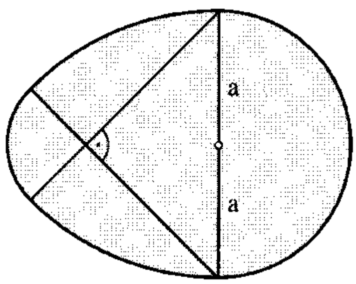


Lösung

$u = \frac{1}{2}\cdot 2\pi a = \pi a \approx 3{,}14a$ (2)

$A = \frac{1}{2}\cdot\pi a^2 - 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\,a^2 \approx 0{,}70a^2$ (3)

Aufgabe 3c: Kreisabschnitte
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:



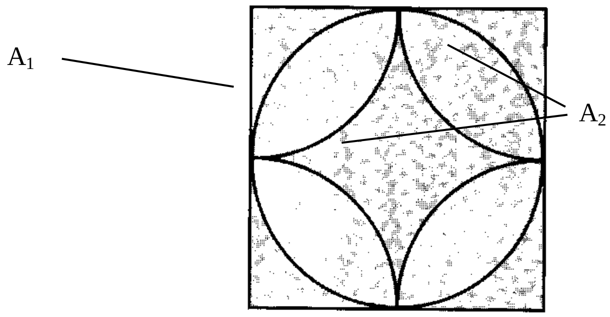
Lösung

$u = \pi a + \frac{1}{4}\cdot 2\pi(2a) + \frac{1}{4}\cdot 2\pi(2 - \sqrt{2})a = (3 - \frac{1}{2}\sqrt{2})\pi a \approx 7{,}20a$ (3)

$A = \pi a^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi(2a)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,a)^2 + \frac{1}{4}\pi(2 - \sqrt{2})^2 a^2 = \left(\frac{7\pi}{2} - \sqrt{2}\pi - 1\right)a^2 \approx 5{,}55a^2$ (4)

Aufgabe 4a: Kreisabschnitte (4)

Berechne den Inhalt A_1 des hell schraffierten Flächenstückes und den Inhalt A_2 der dunkel schraffierten Flächenstücke in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des umliegenden Quadrates. Welches der beiden Flächenstücke ist größer?



Lösung

A_1 ist aus 8 <u>Kreisabschnitten</u> mit $r = \frac{1}{2}a$ und $\alpha = 90°$ zusammengesetzt.

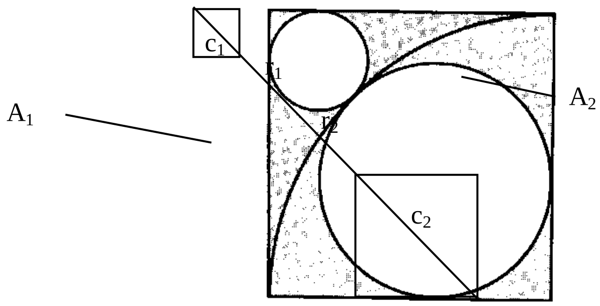
Sein Inhalt ist also $A_1 = 8\cdot\left(\frac{90°}{360°}\cdot\pi\cdot r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = 8\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\cdot r^2 = (2\pi - 4)\cdot\frac{1}{4}a^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot a^2 \approx \underline{0{,}57a^2}$ (2)

Die Fläche des Quadrates ist $A_1 + A_2 = a^2 \Rightarrow A_2 = a^2 - A_1 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a^2 \approx \underline{0{,}43a^2} \Rightarrow A_2 < A_1$. (2)

Aufgabe 4a: Kreisabschnitte

a) Zeige, dass für die Radien r_1 und r_2 der beiden Kreise in dem unten dargestellten Quadrat mit der Seitenlänge a gilt $r_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ und $r_2 = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$.

b) Berechne den Inhalt der dunkel schraffierten Flächenstücke A_1 und A_2 oberhalb und unterhalb des Kreisbogens in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des umliegenden Quadrates. Welches der beiden Flächenstücke ist größer?



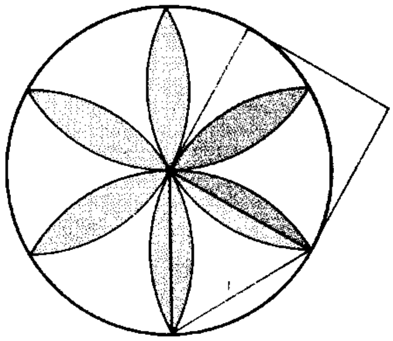
Lösung

a) Der Radius des Kreisbogens ist $a = r_2 + c_2$. Nach Pythagoras ist $c_2 = \sqrt{r_2^2 + r_2^2} = \sqrt{2}\,r_2$. Durch Einsetzen dieses Ergebnisses erhält man $a = r_2 + \sqrt{2}\,r_2 = (1 + \sqrt{2})r_2$ bzw. $r_2 = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$. Ebenso erhält man mit Pythagoras für den kleinen Kreis $c_1 = \sqrt{2}\,r_1$ und für die Diagonale des Quadrates $c_1 + r_1 + r_2 + c_2 = \sqrt{2}\,a$. Durch Einsetzen ergibt sich $\sqrt{2}\,r_1 + r_1 + \frac{a}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\frac{a}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,a \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})r_1 + a = \sqrt{2}\,a \Leftrightarrow r_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}a$.

b) $A_2 = \frac{90°}{360°}\pi a^2 - \pi r_2^2 = \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}a^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{\left(2\sqrt{2}+2\right)^2}\pi a^2 \approx 0{,}246a^2$ und $A_1 = a^2 - \frac{90°}{360°}\pi a^2 - \pi r_1^2 = a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}a^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right)a^2 \approx 0{,}122a^2$.

Aufgabe 4c: Kreisabschnitte

Berechne den Inhalt der gesamten dunkel gefärbten Fläche in Abhängigkeit vom Radius r des Umkreises und vergleiche ihn mit dem Inhalt des eingezeichneten Radiusquadrats.



Lösung

Die dunkel schraffierte Figur ist aus 12 Kreisabschnitten mit Radius r und $\alpha = 60°$ zusammengesetzt. (2)

Man erhält also $A = 12 \cdot \left(\frac{60°}{360°}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2\right) = 12 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2 \approx 1{,}087 r^2 \Rightarrow A > r^2$ (2)