2.9. Kreisberechnungen

2.9.1. Kreisumfang

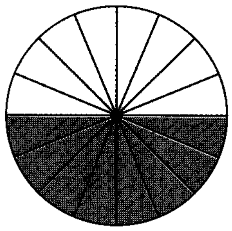
Aufgaben zu Kreisberechnungen Nr. 1

Satz und Definition

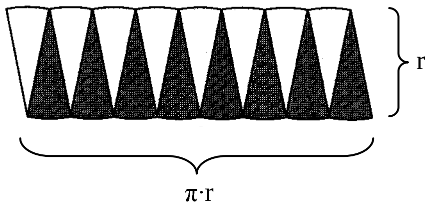
Ein Kreis mit dem Radius r bzw. Durchmesser d = 2r hat den **Umfang** $u = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$. Der **Kreiszahl** $\pi = \frac{u}{d} \approx 3{,}14159\ldots$ (von griech. Peripherie = Rand) ist eine **transzendente Zahl**, die sich nicht durch einen Term mit Brüchen und Potenzen beschreiben lässt.

Übungen: Aufgaben zu Kreisberechnungen Nr. 2 - 4

2.9.2. Kreisinhalt



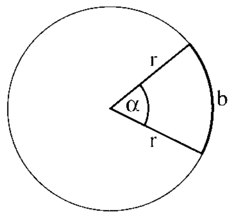
Satz
Ein Kreis mit dem Radius r hat den **Flächeninhalt** $A = \pi \cdot r^2$.
Beweis:
Der Kreis lässt sich in beliebig viele gleich große **Sektoren** (Kreisausschnitte) zerlegen. Diese Sektoren lassen sich **näherungsweise** wieder zu einem Rechtecke mit der Höhe r und der Breite $\pi \cdot r$ zusammenlegen. Der Flächeninhalt ist also näherungsweise $A \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$. Die **Abweichung** von der Rechteckform wird mit zunehmender Zahl der Sektoren **beliebig klein**. Wenn der Fehler beliebig klein ist, muss die Formel **exakt** sein!



Übungen: Aufgaben zu Kreisberechnungen Nr. 5 - 7

2.9.3. Kreisausschnitte

Satz:
Ein **Sektor** (Kreisausschnitt) mit **Mittelpunktswinkel** α und Radius r hat die **Bogenlänge** $b_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$ und den **Flächeninhalt** $A_\alpha = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$.

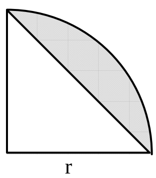


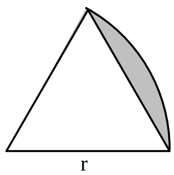
Beweis:
Ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel 1° hat die Bogenlänge $b_1 = \frac{U}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360}$ und den Flächeninhalt $A_1 = \frac{A}{360} = \frac{\pi^2 \cdot r}{360}$. Ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel α setzt sich aus α Sektoren mit Mittelpunktswinkel 1° zusammen und hat daher die α-fache Bogenlänge und den α-fachen Flächeninhalt.

Übungen: Aufgaben zu Kreisberechnungen Nr. 8 und 9

2.9.4. Kreisabschnitte

Satz:
1. Der Kreisabschnitt eines **Viertelkreises** ($\alpha = 90°$) mit Radius r hat den Flächeninhalt $A = A - A = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2} r \cdot r = (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2})r^2 \approx 0{,}28\, r^2$.
2. Der Kreisabschnitt eines **Sechstelkreises** ($\alpha = 60°$) mit Radius r hat den Flächeninhalt $A = A - A = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r = (\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4})r^2 \approx 0{,}09\, r^2$.





Übungen: Aufgaben zu Kreisberechnungen Nr. 10 und 11