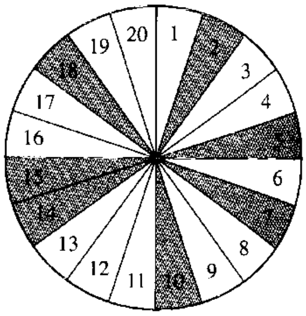
3.1. Aufgaben zu einstufigen Zufallsexperimenten

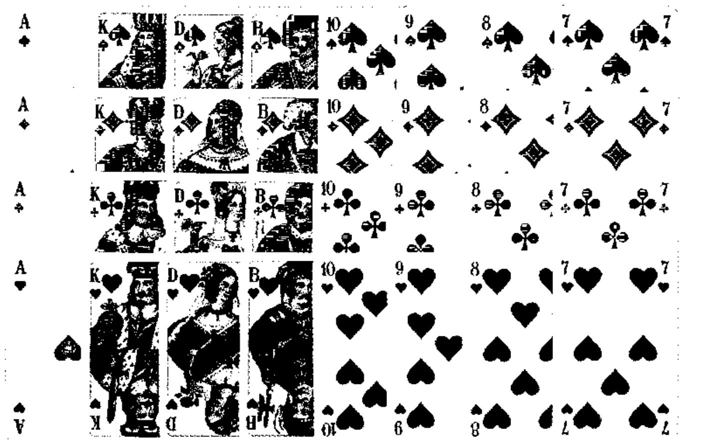
Aufgabe 1: Zufallsexperimente und Ergebnismengen
Entscheide, ob es sich bei den folgenden Fragestellungen um Zufallsexperimente handelt und gib gegebenenfalls die Ergebnismenge S an:
a) An jedem dritten Haus der Mozartstraße steht eine Laterne.
b) Durchschnittlich jeder dritte Haushalt in der Mozartstraße hat kein Auto.
c) Durchschnittlich jeder vierte Zitronenfalter ist dunkler als die anderen.
d) Eine Fertigungsmaschine für Spielzeugkampfroboter spritzt jeden fünften Roboter schwarz; die schwarzen Roboter werden zum doppelten Preis verkauft.
e) Erfahrungsgemäß fällt bei 2 % aller Roboter nach mehrmaligem Gebrauch der Arm ab.
f) An einem radioaktiv belasteten Standort haben durchschnittlich 10 % aller Kleepflanzen 4 Blätter und 5 % rote Blüten.

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Glücksrad



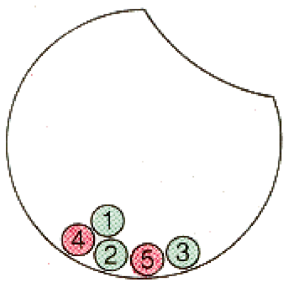
a) Gib zwei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Drehen des abgebildeten Glücksrades an.
b) Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Die Zahl ist durch 3 teilbar
B: Die Zahl ist einstellig und durch 4 teilbar
C: Die Farbe ist rot

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Kartenspiel



a) Gib drei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Ziehen aus dem abgebildeten Kartenspiel an. Hinweis: Kreuz ♣ und Pik ♠ sind schwarz, Herz ♥ und Karo hingegen rot)
b) Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Die Karte ist ein As
B: Die Karte ist eine schwarze Zahl
C: Die Karte ist ein Dame oder eine 7

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung bei der Urne
In einer Urne liegen drei grüne Kugeln mit den Aufschriften 1, 2 und 3 sowie zwei rote Kugeln mit den Aufschriften 4 und 5.



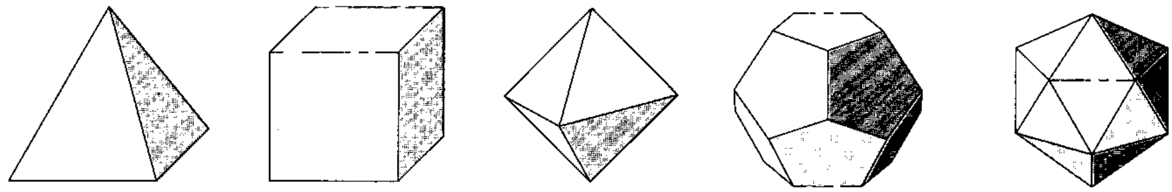
a) Gib zwei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Ziehen aus der Urne an.
b) Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Die Zahl ist gerade
B: Die Farbe ist rot und die Zahl ist ungerade
C: Die Farbe ist grün und die Zahl ist größer als 3

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln
Bei einem Würfel sind die Seiten mit den Augenzahlen 1 und 3 rot gefärbt, die restlichen Seiten sind grün.
a) Gib zwei mögliche Ereignismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Würfeln an.
b) Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Die Zahl ist gerade
B: Die Farbe ist grün und die Zahl ist ungerade
C: Die Farbe ist rot und die Zahl ist grösser als 3

Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Fallen einer Primzahl beim einmaligen Werfen der folgenden regelmäßigen Polyeder:

a) Tetraeder: 4 gleichseitige Dreiecke 1 - 4
b) Hexaeder: 6 Quadrate 1 - 6
c) Oktaeder: 8 gleichseitige Dreiecke 1 - 8
d) Dodekaeder: 12 gleichseitige Fünfecke 1 -12
e) Ikosaeder: 20 gleichseitige Dreiecke 1 - 20



Tetraeder   Hexaeder (Würfel)   Oktaeder   Dodekaeder   Ikosaeder

Aufgabe 7: Zinken

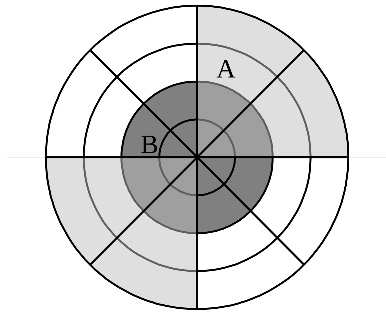
Beschreibe jeweils eine technisch machbare und optisch unauffällige Maßnahme, um die Erfolgschancen einer nicht eingeweihten Person bei den folgenden Glücksspielen zu verändern.

a) Drehen an einem Glücksrad
b) Werfen eines (äußerlich) gleichmäßigen Würfels
c) Ziehen aus einem Kartenspiel
d) Ziehen aus einer Urne

Aufgabe 8: Summenregel und Gegenereignis bei der Zielscheibe

Ein Wurfpfeil wird auf die folgende Zielscheibe mit r = 1m geworfen. Welche Annahmen müssen getroffen werden, um die Trefferwahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Bereiche berechnen zu können?

Berechne die Trefferwahrscheinlichkeiten der folgenden Bereiche. Formuliere dazu die Bereiche für g) und h) in Mengenschreibweise mit Hilfe der Bereiche A und B.



a) A
b) B
c) $\overline{A}$ = alle Punkte, die **nicht** in A liegen
d) $\overline{B}$ = alle Punkte, die **nicht** in B liegen
e) $A \cap B$ = alle Punkte, die in A **und** B liegen
f) $A \cup B$ = alle Punkte, die in A **oder** B liegen
g) ? = alle Punkte, die in **weder** in A **noch** in B liegen
h) ? = alle Punkte, die **nicht** in A **oder nicht** in B liegen

Aufgabe 9: Summenregel und Gegenereignis beim Glücksrad

Ein Glücksrad mit 100 gleich großen von 1 bis 100 nummerierten Sektoren mit wird einmal gedreht. Formuliere die Ereignisse in b) - e) in Mengenschreibweise mit Hilfe der Ereignisse A und B und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten:

a) A: Die Zahl ist durch 12 teilbar
b) B: Die Zahl ist durch 15 teilbar
c) ?: Die Zahl ist **nicht** durch 12 teilbar
d) ?: Die Zahl ist **nicht** durch 15 teilbar
e) ?: Die Zahl ist durch 12 **und** durch 15 teilbar
f) ?: Die Zahl ist durch 12 **oder** durch 15 teilbar
g) ?: Die Zahl ist **weder** durch 12 **noch** durch 15 teilbar
h) ?: Die Zahl ist **nicht** durch 12 **oder nicht** durch 15 teilbar

Aufgabe 10: Summenregel und Gegenereignis bei Vierfeldertafel

In der nebenstehenden Vierfeldertafel ist festgehalten, wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler einer Schule mit dem Schulbus zur Schule kommen. Eine Person wird für eine Befragung zufällig ausgewählt. Betrachte die folgenden Ereignisse:

A: Die Person ist ein Mädchen
B: Die Person fährt mit dem Schulbus
Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse

	Mädchen	Junge	gesamt
Schulbus	20%	15%	35%
anderes Verkehrsmittel	35%	30%	65%
gesamt	55%	45%	100%

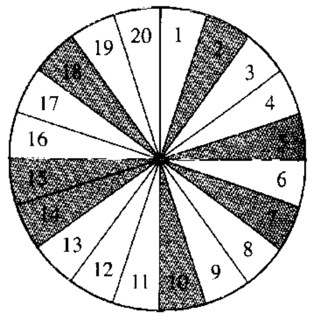
a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \cap \overline{B}$
d) $A \cup \overline{B}$
e) $\overline{A \cap B}$
f) $\overline{A \cup B}$

Aufgabe 11: Summenregel und Gegenereignis bei Umfrage
Von den Schülerinnen und Schülern eines Jahrgangs haben 46 % Französisch (F) und 24 % Spanisch (S) gelernt, 18 % beide Fremdsprachen. Eine Person des Jahrgangs werde zufällig ausgewählt.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie Französisch **oder** Spanisch (d. h. entweder Französisch oder Spanisch oder beide Fremdsprachen) gelernt?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie **weder** Französisch **noch** Spanisch gelernt?

Aufgabe 12: Summenregel und Gegenereignis bei Umfrage
Für eine Stichprobe werden Haushalte zufällig ausgewählt. Man stellt fest, dass in 80 % der Haushalte eine Geschirrspülmaschine vorhanden ist und in 70 % ein Mikrowellenherd, in 60 % beides. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Haushalt ausgewählt, in dem keines der beiden Geräte vorhanden ist?

Aufgabe 13: Zufallsvariablen beim einmaligen Würfeln
Ein Spieler würfelt einmal mit einem sechsseitigen Würfel. Würfelt er eine gerade Augenzahl, so muss er den Betrag der Augenzahl in € an die Bank zahlen. Würfelt er eine ungerade Augenzahl, so erhält er den Betrag der Augenzahl von der Bank als Gewinn. Die Zufallsvariable X(e) soll den Gewinn bzw. Verlust des Spielers bei der Augenzahl e angeben.
Stelle eine Wertetabelle für X(e) auf und berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P(X = 5)$ b) $P(X = -5)$ c) $P(X > 0)$ d) $P(X \leq -3)$

Aufgabe 14: Zufallsvariablen beim Glücksrad
Ein Spieler zahlt 1 €, um einmal an dem Glücksrad drehen zu dürfen. Er gewinnt 1 €, wenn er ein rotes Feld trifft und 5 €, wenn er eine rote Primzahl trifft. Die Zufallsvariable X(e) soll den Gewinn bzw. Verlust des Spielers bei dem Feld e angeben. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P(X = -1)$ b) $P(X = 0)$ c) $P(X = 4)$



Aufgabe 15: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln
Oliver und Markus spielen mit einem regelmäßigen Dodekaeder (Zwölfflächner) mit den Zahlen 1 bis 12. Wenn eine Primzahl fällt, zahlt Oliver den Betrag der Zahl in € an Markus, andernfalls bekommt er den Betrag der gewürfelten Zahl in € von Markus.
Hinweis: 2 gilt als eine Primzahl, 1 aber nicht!
a) Ist das Spiel fair?
b) Nach ein paar Tagen verlangen Markus' Eltern die Festlegung aller Gewinnsätze auf genau 1 €. Ist das Spiel jetzt fair?

Aufgabe 16: Erwartungswert beim Würfeln und beim Glücksrad
Berechne bei den Aufgaben 13 und 14 den mittleren zu erwartenden Gewinn bzw. Verlust pro Spiel und korrigiere die Gewinnsätze so, dass das Spiel fair wird.

Aufgabe 17: Erwartungswert bei Kälbermast
Ein Kälbermastbetrieb hat 1000 Kälber. Bei einem Verkauf nach einem halben Jahr entsteht pro Kalb ein Gewinn von 200 €. Verendet ein Kalb in dieser Zeit, entsteht ein Verlust von 500 €. Wie hoch ist der zu erwartende Gewinn, wenn die Überlebenswahrscheinlichkeit 0,90 beträgt?

Aufgabe 18: Erwartungswert bei Lebensversicherung
Die folgende Tabelle gibt die Überlebenswahrscheinlichkeiten einer bestimmten Berufs- bzw. Risikogruppe an:

Überlebenswahrscheinlichkeit	90 %	70 %	40 %	20 %	10 %	7 %	3 %
bis zum Alter	70	75	80	85	90	95	100

Eine Versicherung möchte für diese Risikogruppe einen Vertrag anbieten, der dem Versicherungsnehmer vom 65. Lebensjahr an eine monatliche Rente von 1000 € garantiert. Berechne die Versicherungsprämie so, dass im Mittel ein Gewinn von 10 % der Prämie für die Versicherung erzielt wird.

Aufgabe 19: Statistik des Legowürfels
Ein viernoppiger Legostein kann beim Würfeln auf Fuß F, Seite S oder Kopf K fallen.
a) Ermittle anhand einer Statistik mit 1000 Würfen die Wahrscheinlichkeiten P(F), P(S) und P(K).
b) Am letzten Schultag soll die Klassenkasse etwas aufgebessert werden. Jeder, der 1 € Einsatz zahlt, darf einmal würfeln. Fällt der Legostein auf Kopf oder Fuß, so ist der Einsatz verloren. Bei Seite wird ein Gewinn von X(S) € ausgezahlt. Berechne X(S) so, dass im Mittel 0,10 € pro Spiel für die Klassenkasse abfallen.

3.1. Lösungen zu den Aufgaben zu einstufigen Zufallsexperimenten

Aufgabe 1: Zufallsexperimente und Ergebnismengen

a) kein Zufallsexperiment, da man für ein beliebig herausgegriffenes Haus durch abzählen **berechnen** kann, ob eine Laternen davor stehen muss.

b) Zufallsexperiment, da man für ein beliebig herausgegriffenes Haus **nicht berechnen** kann, ob ein Auto vorhanden ist oder nicht.

c) kein Zufallsexperiment, da die **Ergebnismenge** nicht klar definiert ist.

d) kein Zufallsexperiment, da man für einen beliebig herausgegriffenen Roboter durch abzählen **berechnen** kann, ob er schwarz gespritzt wird.

e) Zufallsexperiment, da man für einen beliebig herausgegriffenen Roboter **nicht berechnen** kann, ob der Arm abfällt oder nicht.

f) Zufallsexperiment, da man für eine beliebig herausgegriffene Pflanze **nicht berechnen** kann, ob sie vier Blätter oder rote Blüten hat.

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Glücksrad

a) S = {1; 2; ...; 20} oder S = {weiß; rot}

b) alle Felder werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erreicht.

c) $P(A) = P(3; 6; ...; 18) = \frac{6}{20}$, $P(B) = P(4; 8) = \frac{2}{20}$ und $P(C) = P(2; 5; 7; 10; 14; 15; 18) = \frac{7}{20}$

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Kartenspiel

a) S = {p7; p8; ...; pA, k7; ...; kA; kr7; ...krA, h7; ...; hA} mit $P(p7) = ... = P(hA) = \frac{1}{32}$ oder

S = {pik; karo; kreuz; herz} mit $P(pik) = ... = P(herz) = \frac{1}{4}$ oder

S = {7; 8; ...; A} mit $P(7) = ... = P(A) = \frac{1}{8}$

b) die Karten sind nicht gezinkt und werden mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten gezogen.

c) $P(A) = \frac{4}{32}$, $P(B) = \frac{8}{32}$ und $P(C) = \frac{8}{32}$

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei der Urne

a) S = {1; 2; 3; 4; 5} mit $P(1) = ... = P(5) = \frac{1}{5}$ oder

S = {grün; rot} mit $P(grün) = \frac{3}{5}$ und $P(rot) = \frac{2}{5}$

b) die Kugeln sind für die Hand ununterscheidbar gezinkt und werden mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten gezogen.

c) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ und $P(C) = 0$

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

a) S = {1; 2; 3; 4; 5; 6} mit $P(1) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$ oder

S = {grün; rot} mit $P(grün) = \frac{4}{6}$ und $P(rot) = \frac{2}{6}$

b) der Würfel ist gleichmäßig und fällt auf alle Seiten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit..

c) $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ und $P(C) = 0$

Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

a) $P(p) = \frac{2}{4}$ b) $P(p) = \frac{3}{6}$ c) $P(p) = \frac{4}{8}$ d) $P(p) = \frac{5}{12}$ e) $P(p) = \frac{8}{20}$

Aufgabe 7: Zinken

a) kleines Gewicht (Papierstreifen) hinten innen befestigen)
b) kleinen Nagel ohne Kopf (Reißzwecke) in die Zahl schlagen und vorsichtig neu lackieren
c) geschickt mischen?
d) Kugel mit eingeschlagenem Nagel beschweren (siehe b))

Aufgabe 8: Gegenereignis und Summenregel bei der Zielscheibe

Notwendige Annahmen:

1. Es werden nur die Würfe gezählt, bei denen die Scheibe überhaupt getroffen wurde: P(S) = 1
2. Jeder Punkt auf der Scheibe wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen: $P(e_1) = P(e_2) \Rightarrow A(e_1) = A(e_2)$ (Laplace-Bedingung)

a) $P(A) = \frac{A}{S} = \frac{1}{2}$

b) $P(B) = \frac{B}{S} = \frac{\pi \cdot 0,5^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

d) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$

e) $P(A \cap B) = \frac{A \cap B}{S} = \frac{1}{8}$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$

g) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{8}$

h) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{7}{8}$

Aufgabe 9: Summenregel und Gegenereignis beim Glücksrad

a) P(A) = P(12, 24, ..., 96) = 8 %
b) P(B) = P(15, 30, ..., 90) = 6 %
c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 92\ \%$
d) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 94\ \%$
e) $P(A \cap B) = P(60) = 1\ \%$
f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 13\ \%$
g) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 99\ \%$
h) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 99\ \%$

Aufgabe 10: Summenregel und Gegenereignis bei der Vierfeldertafel

a) $P(A \cap B) = 20\ \%$
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 70\ \%$
c) $P(A \cap \overline{B}) = 35\ \%$
d) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 85\ \%$
e) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 80\ \%$
f) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 30\ \%$

Aufgabe 11: Summenregel und Gegenereignis bei Umfrage

a) $P(F \cup S) = P(F) + P(S) - P(F \cap S) = 62\ \%$
b) $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = P(\overline{F \cup S}) = 1 - P(F \cup S) = 48\ \%$

Aufgabe 12: Summenregel und Gegenereignis bei Umfrage

$P(G \cup M) = P(G) + P(M) - P(G \cap M) = 90\ \%$

$\Rightarrow P(\overline{G} \cap \overline{M}) = P(\overline{G \cup M}) = 1 - P(G \cup M) = 10\ \%$

Aufgabe 13: Zufallsvariablen beim einmaligen Würfeln

a) $P(X = 5) = P(5) = \frac{1}{6}$ b) $P(X = -5) = 0$ c) $P(X > 0) = P(1; 3; 5) = \frac{3}{6}$ d) $P(X \leq -3) = P(4; 6) = \frac{2}{6}$

Aufgabe 14: Zufallsvariablen beim Glücksrad

a) $P(X = -1) = 1 - P(X \neq -1) = 1 - P(\text{rot}) = \frac{13}{20}$

b) $P(X = 0) = P(\text{rot, aber keine Primzahl}) = P(10 \text{ oder } 14 \text{ oder } 15 \text{ oder } 18) = \frac{4}{20}$

c) $P(X = 4) = P(\text{rote Primzahl}) = P(2 \text{ oder } 5 \text{ oder } 7) = \frac{3}{20}$

Aufgabe 15: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X(e)	−1	2	3	−4	5	−6	7	−8	−9	−10	11	−12
X’(e)	−1	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	−1	1	−1

X = Gewinn von Markus ⇒ $E(X) = -1{,}83$ €

X’ = Gewinn von Markus ⇒ $E(X') = -0{,}17$ €

Aufgabe 16: Erwartungswert beim Würfeln und beim Glücksrad

a) X = Gewinn des Spielers ⇒ $E(X) = \frac{1}{6}\cdot(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6)$ € $= -0{,}50$ € ⇒ Der Spieler ist benachteiligt

⇒ wähle z.B. Gewinn = Augenzahl + 1 € für den Spieler bei ungerader Zahl.

b) X = Gewinn des Spielers ⇒ $E(X) = \frac{5}{20}\cdot 1$ € $+ \frac{2}{20}\cdot 5$ € $- 1$ € $= -0{,}25$ € ⇒ Der Spieler ist benachteiligt

⇒ wähle z.B. Gewinn = 2 € bei rotem Feld und 5 € bei roter Primzahl

Aufgabe 17: Erwartungswert bei der Kälbermast

$E(X) = 0{,}9\cdot 200$ € $- 0{,}1\cdot 500$ € = 130 € zu erwartender Gewinn pro Kalb ⇒ 130 000 € zu erwartender Gesamtgewinn

Aufgabe 18: Erwartungswert bei Lebensversicherung

Da die meisten Kunden nicht genau am Ende sondern irgendwann im Laufe der gegebenen Fünfjahresabschnitte sterben werden, muss man für die Berechnung der zu erwartenden Auszahlungen ein mittleres Sterbedatum willkürlich festsetzen. Hier wird einfach jeweils die Mitte der Fünfjahresabschnitte gewählt. **Beispiel**: Von den 90 %, welche das Alter 70 erreichen, sind beim Alter 75 noch 70 % übrig. 20 % sterben also zwischen 70 und 75 und erhalten daher im Mittel 7,5 Jahre = 90 Monate Rente. Entsprechend kann man annehmen, dass die 3 %, welche 100 Lebensjahre erreichen, durchschnittlich auch nach 2,5 Jahren tot sind. X sei die insgesamt ausbezahlte Rente:

t in Monaten	30	90	150	210	270	330	390	450
X(t)	30 000	90 000	150 000	210 000	270 000	330 000	390 000	450 000
P(t)	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,03	0,04	0,03

⇒ $E(X) = 174\,000$ €. Da noch 10 % Gewinn abfallen sollen, müsste die Prämie $P = \frac{E(X)}{0{,}9} = 193\,333$ € betragen.

Aufgabe 19: Statistik des Legowürfels

a) Angenommen, $P(o) = 38{,}3$ %, $P(u) = 41{,}2$ % und $P(s) = 20{,}5$ %

b) $0{,}1$ € $= E(X) = 0{,}205\cdot X(s) - 1$ € ⇒ $X(s) = 5{,}36$ €