3.1. Fragen zu einstufigen Zufallsexperimenten

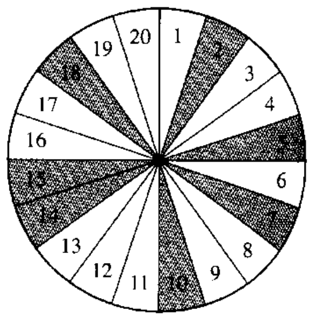
Aufgabe 1a (4)
Entscheide und begründe, ob die beiden folgenden Spiele als Zufallsexperimente betrachtet werden können:
a) Zarah steht mit verbundenen Augen in der Mitte des Stuhlkreises, dreht sich dreimal im Kreis und zeigt auf eine beliebige Mitschülerin. Hat die Mitschülerin eine Brille, so darf sie aus dem Kreis.
b) Nun steht Johanna mit verbundenen Augen im Stuhlkreis und nennt den Namen eine Mitschülerin. Besitzt die Mitschülerin einen Hund, so darf Johanna aus dem Kreis.

Aufgabe 1a (4)
a) Das Ergebnis genau definiert und unvorhersehbar. Es handelt sich also um ein Zufallsexperiment. (2)
b) Da Johanna eventuell weiß, wer einen Hund hat, ist der Ausgang des Spiels nicht zufällig bzw. unvorhersehbar und es ist ebenfalls kein Zufallsexperiment. (2)

Aufgabe 1b (4)
Entscheide und begründe, ob die beiden folgenden Spiele als Zufallsexperimente betrachtet werden können:
a) Zarah steht mit verbundenen Augen in der Mitte des Stuhlkreises, dreht sich dreimal im Kreis und zeigt auf eine beliebige Mitschülerin. Ist die Mitschülerin blond, so darf sie aus dem Kreis.
b) Nun steht Johanna mit verbundenen Augen im Stuhlkreis und nennt den Namen eine Mitschülerin. Besitzt die Mitschülerin gerade den Softball, welcher ständig hin und her geworfen wird, so darf Johanna aus dem Kreis.

Aufgabe 1b (4)
a) Da man kann nicht genau entscheiden kann, ob die Mitschülerin blond ist, ist das Ergebnis nicht genau definiert und es ist kein Zufallsexperiment. (2)
b) Da Johanna eventuell hört, wer den Ball gefangen hat, ist der Ausgang des Spiels nicht hundertprozentig zufällig bzw. unvorhersehbar und es ist ebenfalls kein Zufallsexperiment. Man könnte aber auch argumentieren, dass sie höchstens ungefähr die Richtung hört und durch das ständige Nachverfolgen ohnehin die Orientierung verliert, so dass man m. E. doch von einem Zufallsexperiment sprechen kann. Das Argument zählt!(2)

Aufgabe 2a (6)
Das rechts abgebildete Glücksrad wird gedreht und man betrachtet den Sektor, welcher beim Stillstand genau nach oben zeigt.
a) Gib zwei mögliche Ergebnismenge und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen an. (4)
b) Welche Annahme muss man treffen, um die Wahrscheinlichkeiten angeben zu können? (1)
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl nicht durch 5 teilbar? (1)



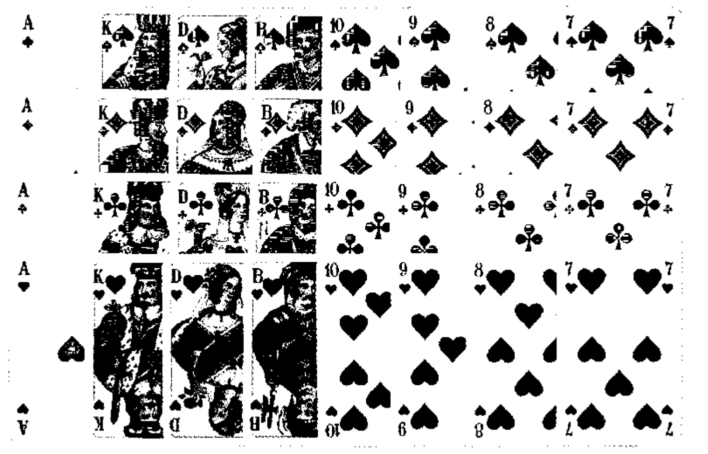
Aufgabe 2a (6)

a) $S = \{1; 2; ...; 20\}$ mit $P(1) = \ldots = P(20) = \frac{1}{20}$. oder $S = \{\text{weiß}; \text{rot}\}$ mit $P(\text{weiß}) = \frac{11}{20}$ und $P(\text{rot}) = \frac{7}{20}$ (4)

b) Alle Felder werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erreicht. (1)

c) $P(\text{nicht durch 5 teilbar}) = \frac{17}{20}$. (1)

Aufgabe 2b (6)
a) Gib zwei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Ziehen aus dem abgebildeten Kartenspiel an. Hinweis: Kreuz ♣ und Pik ♠ sind schwarz, Herz ♥ und Karo hingegen rot. (4)
b) Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen? (1)
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt die Karte eine gerade Zahl? (1)



Aufgabe 2b (6)

a) $S = \{p7; p8; ...; pA, k7; ...; kA; kr7; ...krA, h7; ...; hA\}$ mit $P(p7) = ... = P(hA) = \frac{1}{32}$ oder (2)

$S = \{pik; karo; kreuz; herz\}$ mit $P(pik) = ... = P(herz) = \frac{1}{4}$ (2)

b) die Karten sind nicht gezinkt und werden mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten gezogen. (1)

c) $P(\text{gerade Zahl}) = P(\text{8 der 10}) = \frac{8}{32}$. (1)

Aufgabe 3a (5)

In einer Klasse aus 10 Jungen und 20 Mädchen spielt eine unter den Mädchen gewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% Hockey, aber ein zufällig gewähltes Mitglied der Gesamtklasse spielt mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 20% Hockey.

a) Wie viele Mädchen und wie viele Jungs spielen Hockey? (3)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Klassenmitglied ein Hockey spielender Junge ist? (2)

Aufgabe 3a (5)

M = Mädchen, J = Junge, H = Hockey

a) $\frac{1}{4} = \frac{\text{Zahl der Hockey spielenden Mädchen}}{20} \Rightarrow$ Zahl der Hockey spielenden Mädchen = 5 (1)

$\frac{1}{5} = \frac{\text{Zahl der Hockey spielenden Mädchen und Jungen}}{30} \Rightarrow$ Zahl der Hockey spielenden Mädchen und Jungen = 6

(1)

$\Rightarrow 6 - 5 = 1$ Junge spielt Hockey (1)

b) $P(\text{Junge} \cap \text{Hockey}) = \frac{1}{30}$ (2)

Aufgabe 3b (5)

In einer Klasse aus 20 Jungen und 10 Mädchen spielt eine unter den Mädchen gewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% Hockey, aber ein zufällig gewähltes Mitglied der Gesamtklasse spielt ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% Hockey.

a) Wie viele Mädchen und wie viele Jungs spielen Hockey? (3)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Klassenmitglied ein Hockey spielender Junge ist? (2)

Aufgabe 3b (5)

M = Mädchen, J = Junge, H = Hockey

a) $\frac{1}{5} = \frac{\text{Zahl der Hockey spielenden Mädchen}}{10} \Rightarrow$ Zahl der Hockey spielenden Mädchen = 2 (1)

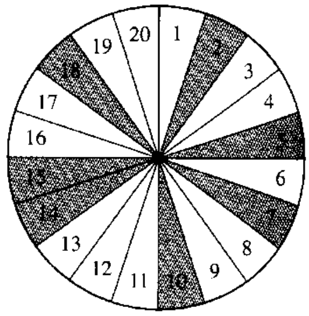
$\frac{1}{5} = \frac{\text{Zahl der Hockey spielenden Mädchen und Jungen}}{30} \Rightarrow$ Zahl der Hockey spielenden Mädchen und Jungen = 6 (1)

$\Rightarrow 6 - 2 = 4$ Jungen spielen Hockey (1)

b) $P(\text{Junge} \cap \text{Hockey}) = \frac{2}{15}$ (2)

Aufgabe 4: Erwartungswert beim einmaligen Drehen am Glücksrad

Ein Spieler zahlt 0,50 €, um einmal an dem Glücksrad drehen zu dürfen. Er gewinnt 1 €, wenn er ein rotes Feld trifft und 4 €, wenn er die 7 trifft. Berechne den zu erwartenden durchschnittlichen Gewinn bzw. Verlust des Spielers pro Spiel.



Lösungen

X = Gewinn des Spielers

e	weiss	rot	7
P(e)	$\frac{13}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$
X(e)	−0,5	0,5	3,5

$$E(X) = \frac{13}{20}\cdot(-0{,}5)\ € + \frac{6}{20}\cdot 0{,}5\ € + \frac{1}{20}\cdot 3{,}50\ € = +0{,}0026\ €\ .$$

Das Spiel ist nahezu fair, denn der Spieler kann im Durchschnitt gerade einen viertel Cent Gewinn pro Spiel erwarten.

Aufgabe 5: Erwartungswert beim einmaligen Würfeln mit einem Ikosaeaeder

Nicolo und Luca spielen mit einem regelmäßigen Ikosaeder (Zwanzigflächner) mit den Zahlen 1 bis 20. Wenn eine Primzahl fällt, zahlt Nicolo den Betrag der Zahl in € an Luca, andernfalls bekommt er den Betrag der Zahl von Luca.

a) Ist das Spiel fair?
b) Nach ein paar Tagen verlangen Lucas Eltern die Festlegung aller Gewinnsätze auf genau 1 €. Ist das Spiel jetzt fair?

Lösungen

a) X = Gewinn von Luca

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P(e)	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
X(e)	−1	2	3	−4	5	−6	7	−8	−9	−10	11	−12	13	−14	−15	−16	17	−18	19	20

$$E(X) = \frac{1}{20}\ (-1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 - 9 - 10 + 11 - 12 + 13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + 19 - 20) = -\frac{22}{12} \approx -2{,}80\ €$$

Das Spiel ist nicht fair, denn Luca muss durchschnittlich 2,80 €Verlust pro Spiel erwarten.

b) X’ = neuer Gewinn von Luca

$$E(X') = \frac{1}{20}\ (-12 + 8) = -\frac{4}{20} \approx -0{,}20\ €$$

Das Spiel ist immer noch nicht fair!

Aufgabe 6a: Erwartungswert bei Verkehrsstatistik (2)

An einer Straßenkreuzung soll die Verkehrsdichte gemessen werden. Dazu wird hundertmal die Zahl k der Fahrzeuge bestimmt, die innerhalb eines 20-Sekunden-Intervalls H_k vorbeifahren:

k	0	1	2	3	4	5	6	>6
H_k	12	28	28	18	9	4	1	0

Berechne die mittlere Verkehrsdichte bezogen auf ein Intervall von 20 Sekunden.

Lösung

E(X) = 2 Fahrzeuge in 20 Sekunden (2)

Aufgabe 6b: Erwartungswert bei Verkehrsstatistik (2)
An einer Straßenkreuzung soll die Verkehrsdichte gemessen werden. Dazu wird fünfzigmal die Zahl k der Fahrzeuge bestimmt, die innerhalb eines 10-Sekunden-Intervalls H_k vorbeifahren:

k	0	1	2	3	4	5	6	>6
H_k	1	9	15	12	7	4	2	0

Berechne die mittlere Verkehrsdichte bezogen auf ein Intervall von 10 Sekunden.

Lösung
E(X) = 2,7 Fahrzeuge in 10 Sekunden (2)