3.2. Prüfungsaufgaben zum Ziehen mit Zurücklegen

Aufgabe 1: Ziehen mit Zurücklegen beim Würfelwurf (3)
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei 5 Würfen mit einem idealen Würfel
a) jedes Mal die 6 (1)
b) mindestens einmal die 6 ? (2)

Lösung

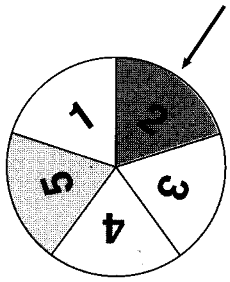
a) $P(6,6,6,6,6) = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0{,}012\ \%$ (1)

b) $P(\text{mindestens einmal } 6) = 1 - P(\text{keinmal } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 59{,}8\ \%$ (2)

Aufgabe 2: Ziehen mit Zurücklegen beim Münzwurf (6)
Bei einer verbeulten Münze sei P(Kopf) = 0,3. Diese Münze wird dreimal geworfen und jedes Mal festgestellt, ob Kopf oder Zahl gefallen ist.
a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung an. (4)
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt höchstens zweimal Kopf? (2)

Lösung:
a) $P(k,k,k) = 0{,}3^3 = 2{,}7\ \%$ (1)
$P(k,k,z) = P(k,z,k) = P(z,k,k) = 0{,}3^2\cdot 0{,}7 = 6{,}3\ \%$ (1)
$P(k,z,z) = P(z,k,z) = P(z,z,k) = 0{,}7^2\cdot 0{,}3 = 14{,}7\ \%$ (1)
$P(z,z,z) = 0{,}7^3 = 34{,}3\ \%$ (1)
b) $P(\text{höchstens zweimal } k) = 1 - P(k,k,k) = 97{,}3\ \%$ (2)

Aufgabe 3: Ziehen mit Zurücklegen beim Glücksrad (3)
Bei dem abgebildeten Glücksrad erscheint jedes der 5 Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) jedes Mal die 5 erscheint. (1)
b) mindestens einmal die Zahl 5 erscheint (2)



Lösung:
a) $P(\text{viermal } 5) = 0{,}2^4 = 1{,}6\ \%$
b) $P(\text{mindestens einmal } 5) = 1 - P(\text{keinmal } 5) = 1 - 0{,}8^4 = 59{,}0\ \%$

Aufgabe 4: Ziehen mit Zurücklegen und Unabhängigkeit beim Glücksrad (3)
Bei dem abgebildeten Glücksrad erscheint jedes der 5 Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuche die beiden Ereignisse A und B auf Abhängigkeit:
A: zweimal weiße Farbe
B: zweimal ungerade Zahl

Lösung
$P(A) = 0{,}6^2 = 0{,}36$ (0,5)
$P(B) = 0{,}6^2 = 0{,}36$ (0,5)
$P(A)\cdot P(B) = 0{,}058$ (0,5)
$P(A\cap B) = P(3,3) + P(3,1) + P(1,3) + P(1,1) = 4\cdot 0{,}2^2 = 0{,}16$ (1)
$P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$ A und B sind abhängig (0,5)

Aufgabe 5: Ziehen mit Zurücklegen bei Ampeln (7)
Frau Müller kommt auf ihrem Weg zur Arbeit an zwei Ampeln vorbei, die unabhängig voneinander arbeiten. Sie stellt fest, dass die erste Ampel in 75 % und die zweite in 40 % ihrer Fahrten grün zeigt. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Beide Ampeln zeigen grün (1)
B: Mindestens eine Ampel zeigt grün (2)
C: Genau eine Ampel zeigt grün (2)
D: Höchstens eine Ampel zeigt grün. (2)

Lösung:

$P(A) = P(g,g) = 0{,}75 \cdot 0{,}4 = 30\ \%$ (1)

$P(B) = 1 - P(r,r) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 85\ \%$ (2)

$P(C) = P(g,r) + P(r,g) = 0{,}75 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 55\ \%$ (2)

$P(D) = 1 - P(g,g) = 70\ \%$ (2)

Aufgabe 6: Ziehen mit Zurücklegen bei Fehlerquellen (6)

Bei der Herstellung eines Gerätes sind 5 % fehlerhaft. Die fehlerhaften Geräte haben mindestens einen der beiden Fehler F_1 und F_2, welche unabhängig voneinander auftreten. Andere Fehler treten nicht auf. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler F_1 ist 2 %.

a) Zeichne den Ereignisbaum

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der Fehler F_2 auf?

Lösung:

a) Ereignisbaum mit zwei Stufen F_1 und F_2 (2)

b) $P(\text{weder } F_1 \text{ noch } F_2) = (1 - P(F_1))(1 - P(F_2)) = 0{,}95$ mit $P(F_1) = 0{,}02$ (2)

$\Rightarrow 0{,}98 \cdot (1 - P(F_2)) = 0{,}95 \Rightarrow P(F_2) = 1 - \dfrac{0{,}95}{0{,}98} = 3\ \%$. (2)

Aufgabe 7: Ziehen mit Zurücklegen bei Qualitätskontrolle (8)

Bei der Produktion von Soundkarten für Computer sind durchschnittlich 5 % der hergestellten Karten defekt. Bei der anschließenden Qualitätskontrolle werden 94 % der defekten Karten erkannt und aussortiert. Leider werden auch 2 % der einwandfreien Karten bei der Kontrolle als defekt deklariert und aussortiert.

a) Zeichne einen Ereignisbaum (2)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Soundkarte aussortiert wird ? (3)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrolle richtig entscheidet ? (3)

Lösung:

a) Ereignisbaum mit zwei Stufen Produktion und Kontrolle (2)

b) P(aussortiert) = P(defekt und aussortiert) + P(nicht defekt und aussortiert) (2)

$= 0{,}05 \cdot 0{,}94 + 0{,}95 \cdot 0{,}02 = 6{,}6\ \%$ (1)

c) P(Kontrolle richtig) = P(defekt und aussortiert) + P(nicht defekt und nicht aussortiert) (2)

$= 0{,}05 \cdot 0{,}94 + 0{,}95 \cdot 0{,}98 = 97{,}8\ \%$ (1)

Aufgabe 8: Ziehen mit Zurücklegen bei Parallel- und Reihenschaltung (6)

Ein Gerät G besteht aus drei Bauteilen T_1, T_2 und T_3, die mit den Wahrscheinlichkeiten 0,95, 0,90 bzw. 0,85 unabhängig voneinander funktionieren. Das Gerät funktioniert, solange T_1 oder beide Bauteile T_2 und T_3 funktionieren.

a) Zeichne einen Ereignisbaum. (3)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das Gerät? (3)

Lösung:

a) Ereignisbaum mit drei Stufen T_1, T_2 und T_3 (3)

b) P(G funktioniert) = P(T_1 funktioniert) + P(T_1 defekt, T_2 funktioniert, T_3 funktioniert) (2)

$= 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}85 = 98{,}825\ \%$. (1)

Aufgabe 9: Ziehen mit Zurücklegen bei Parallel- und Reihenschaltung (6)

In einem Elektrizitätswerk arbeiten unabhängig voneinander ein großer Generator G_1 und zwei kleine Generatoren G_2 und G_3. Fällt der große **oder** fallen **beide** kleinen Generatoren aus, so wird automatisch ein Reservegenerator zugeschaltet. An 200 Tagen fällt der G_1 durchschnittlich an 4 Tagen, G_2 an 3 Tagen und G_3 an 2 Tagen aus.

a) Zeichne den Ereignisbaum (3)

b) An wie vielen von 100 Tagen wird durchschnittlich der Reservegenerator zugeschaltet?

Lösung

a) Ereignisbaum mit drei Stufen G_1, G_2 und G_3 (3)

b) P(Reservegenerator) = P(G_1 fällt aus) + P(G_1 funktioniert, G_2 fällt aus, G_3 fällt aus) (2)

$= 0{,}02 + 0{,}98 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}01 = 2{,}01\ \%$., d.h., an 2 von hundert Tagen (1)