3.2. Prüfungsaufgaben zum Ziehen ohne Zurücklegen

Aufgabe 1: Ziehen mit und ohne Zurücklegen (5)
Aus einer Urne mit 9 roten und 6 weißen Kugeln werden drei Kugeln gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei rote Kugeln dabei waren, wenn
a) mit
b) ohne Zurücklegen
gezogen wurde.

Lösung

a) P(mindestens zwei rote)
$$= P(rrr) + P(wrr) + P(rwr) + P(rrw)$$
$$= \frac{9}{15}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{9}{15} + \frac{6}{15}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{9}{15} + \frac{9}{15}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{15} + \frac{9}{15}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{15}$$
$$= \frac{81}{125}$$
$$\approx 64{,}8\ \%$$

b) P(mindestens zwei rote)
$$= P(rrr) + P(wrr) + P(rwr) + P(rrw)$$
$$= \frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13} + \frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13} + \frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{8}{13} + \frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{6}{13}$$
$$= \frac{60}{91}$$
$$\approx 65{,}9\ \%$$

Aufgabe 2: Ziehen mit und ohne Zurücklegen (5)
Aus einer Urne mit 6 roten und 9 weißen Kugeln werden drei Kugeln gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei rote Kugeln dabei waren, wenn
a) mit
b) ohne Zurücklegen
gezogen wurde.

Lösung

a) P(mindestens zwei rote)
$$= P(rrr) + P(wrr) + P(rwr) + P(rrw)$$
$$= \frac{6}{15}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{6}{15} + \frac{9}{15}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{6}{15} + \frac{6}{15}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{15} + \frac{6}{15}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{15}$$
$$= \frac{44}{125}$$
$$\approx 35{,}2\ \%$$

b) P(mindestens zwei rote)
$$= P(rrr) + P(wrr) + P(rwr) + P(rrw)$$
$$= \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13} + \frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13} + \frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13} + \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{9}{13}$$
$$= \frac{31}{91}$$
$$\approx 34{,}1\ \%$$

Aufgabe 3: Ziehen ohne Zurücklegen (2)
Aus den Zahlen 1 bis 100 werden zwei verschiedene Zahlen zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihre Summe eine gerade Zahl?

Lösung:

$$P(\text{Summe gerade}) = P(g,g) + P(u,u) = \frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99} + \frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99} = \frac{49}{99} \approx 49{,}5\ \%$$

Aufgabe 4: Ziehen ohne Zurücklegen (2)
Aus den Zahlen 1 bis 100 werden zwei verschiedene Zahlen zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihre Summe eine ungerade Zahl?

Lösung:

P(Summe ungerade) = P(g,u) + P(u,g) = $\frac{50}{100}\cdot\frac{50}{99} + \frac{50}{100}\cdot\frac{50}{99} = \frac{50}{99} \approx 51{,}5$ %

Aufgabe 5: Ziehen ohne Zurücklegen (2)
In einer Urne befinden sich 5 weiße und 6 rote Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Kugeln weiß sind.

Lösung:

P(w,w,w) = $\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}$ = 6 % (2)

Aufgabe 6: Ziehen ohne Zurücklegen und Spielabbruch (3)
Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel: Aus einer Urne mit fünf schwarzen und einer weißen Kugel ziehen sie abwechselnd ohne Zurücklegen eine Kugel. Wer zuerst die weiße Kugel zieht, hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A, wenn er beginnt?

Lösung:

P(A gewinnt) = P(w) + P(s,s,w) + P(s,s,s,s,w) = $\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$ = 50 % (3)

Aufgabe 7: Ziehen ohne Zurücklegen (3)
Ein Elektrohändler kauft regelmäßig preiswerte Restbestände von Glühbirnen, wobei die Ausschussquote aber 5 % nicht überschreiten soll. Um dies zu überprüfen, entnimmt der Händler jeder Lieferung von 100 Glühbirnen 2 Stück und testet diese. Er behält die Lieferung nur dann, wenn diese beiden Glühbirnen einwandfrei sind, andernfalls lässt er sie zurückgehen. Berechne das maximale Risiko dafür, dass eine dem Qualitätskriterium entsprechende Lieferung fälschlicherweise zurückgewiesen wird.

Lösung:

P(mindestens eine Birne defekt) = 1 − P(beide Birnen in Ordnung) = $1 - \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}$ = 9,8 % (3)

Aufgabe 8: Ziehen ohne Zurücklegen (3)
Ein Textilhändler kauft regelmäßig preiswerte Restbestände von Stoffballen, wobei die Ausschussquote aber 8 % nicht überschreiten soll. Um dies zu überprüfen, entnimmt der Händler jeder Lieferung von 100 Stoffballen 5 Stück und untersucht sie auf Webfehler und Farbabweichungen. Er behält die Lieferung nur dann, wenn alle 5 Stoffballen einwandfrei sind, andernfalls lässt er sie zurückgehen. Berechne das maximale Risiko dafür, dass eine dem Qualitätskriterium entsprechende Lieferung fälschlicherweise zurückgewiesen wird.

Lösung:

P(mindestens ein Stoffballen fehlerhaft) = 1 − P(alle 5 in Ordnung) = $1 - \frac{92}{100}\cdot\frac{91}{99}\cdot\frac{90}{98}\cdot\frac{89}{97}\cdot\frac{88}{96}$ = 34,7 % (3)

Aufgabe 9: Ziehen mit und ohne Zurücklegen (4)
In einer Urne befinden sich zehn Kugeln mit den Nummern 1 - 10. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
a) stets die gleiche Nummer, wenn man 3 mal **mit** Zurücklegen zieht (1)
b) nie die gleiche Nummer, wenn man 3 mal **mit** Zurücklegen zieht (1)
c) die drei höchsten Nummern, wenn man 3 mal **ohne** Zurücklegen zieht (1)
d) drei Nummer über 5, wenn man 3 mal **ohne** Zurücklegen zieht (1)

Lösung:

a) P(stets die gleiche Nummer) = $10\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ = 1 % (1)

b) P(nie die gleiche Nummer) = $\frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}$ = 72 % (1)

c) P(die drei höchsten Nummern) = $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}$ = 0,83 % (1)

d) P(drei Nummern über 5) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}$ = 8,3 % (1)

Aufgabe 10: Ziehen ohne Zurücklegen (7)
Ein Kartenspiel besteht aus 5 weißen und 7 schwarzen Karten.

a) Es werden 4 Karten **ohne** Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse
A: Alle Karten sind weiß (1)
B: Genau zwei Karten sind weiß (2)

b) Alle Karten werden nacheinander **ohne** Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man zuerst alle Karten der einen Farbe und dann alle Karten der anderen Farbe? (2)

c) Es werden 5 Karten mit einem Griff gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 3 Karten schwarz? (2)

Lösung

a) P(A) = $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$ = 1,0 % und P(B) = $\binom{4}{2}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}$ = 42,4 % (3)

b) P(erst alle weiß oder erst alle schwarz) = $2\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1}$ = 0,25 % (2)

c) P(3 von 5 sind schwarz) = $\binom{5}{3}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$ = 44,2 % (2)