

3.2. Prüfungsaufgaben zu Zufallsvariablen

Aufgabe 1: Erwartungswert (2)

An einer Straßenkreuzung soll die Verkehrsdichte gemessen werden. Dazu wird hundertmal die Zahl k der Fahrzeuge bestimmt, die innerhalb eines 20-Sekunden-Intervalls H_k vorbeifahren:

k	0	1	2	3	4	5	6	>6
H_k	12	28	28	18	9	4	1	0

Berechne die mittlere Verkehrsdichte bezogen auf ein Intervall von 20 Sekunden.

Lösung

$$E(X) = 2 \text{ Fahrzeuge in 20 Sekunden} \quad (2)$$

Aufgabe 2: Erwartungswert (2)

An einer Straßenkreuzung soll die Verkehrsdichte gemessen werden. Dazu wird fünfzigmal die Zahl k der Fahrzeuge bestimmt, die innerhalb eines 10-Sekunden-Intervalls H_k vorbeifahren:

k	0	1	2	3	4	5	6	>6
H_k	1	9	15	12	7	4	2	0

Berechne die mittlere Verkehrsdichte bezogen auf ein Intervall von 10 Sekunden.

Lösung

$$E(X) = 2,7 \text{ Fahrzeuge in 10 Sekunden} \quad (2)$$

Aufgabe 3: Ziehen ohne Zurücklegen mit Zufallsvariablen (10)

Ein Kartenspiel besteht aus 32 Karten in den 4 „Farben“ Kreuz, Pik, Herz und Karo. Zu jeder Farbe gibt es 8 Karten, nämlich As (11), König (4), Dame (3), Bube (2), Zehn (10), Neun (0), Acht (0) und Sieben (0). Die in Klammern angegebene Zahl gibt den Wert der jeweiligen Karte an.

- Aus dem Kartenspiel wird eine Karte gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
 A: Die Karte ist eine Herzkarte (1)
 B: Die Karte ist eine Dame oder ein König. (1)
 Prüfe, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind. (1)
- Ein Spieler zieht aus dem Kartenspiel drei Karten ohne Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
 C: Mindestens zwei Karten sind Pik-Karten. (3)
- Es werden aus dem Kartenspiel zwei Karten ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibe die Summe der beiden Kartenwerte. Berechne die beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 $P(X = 6)$ (2)
 $P(6 \leq X < 10)$ (3)

Lösung

$$a) \quad P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 25 \% \quad (1)$$

$$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 25 \% \quad (1)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 6,25 \% \quad (1)$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{16} = P(A \cap B) \Rightarrow A \text{ und } B \text{ sind voneinander unabhängig!} \quad (1)$$

$$b) \quad P(C) = P(\text{genau zwei Pik}) + P(\text{drei Pik}) \quad (1)$$

$$= 3 \cdot \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{24}{30} + \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} \quad (1)$$

$$\approx 14,6 \% \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
c) \quad P(X = 6) &= P(D,D) + P(K,B) + P(B,K) & (1) \\
&= \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} + \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} + \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} & (0,5) \\
&= \frac{44}{32 \cdot 31} \approx 4,43 \% & (0,5) \\
P(6 \leq X < 10) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) & (1) \\
&= P(X = 6) + P(K,D) + P(D,K) + P(K,K) & (1) \\
&= \frac{44}{32 \cdot 31} + \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} + \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} + \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} & (0,5) \\
&= \frac{88}{32 \cdot 31} \approx 8,86 \% & (0,5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Ziehen ohne Zurücklegen mit Zufallsvariablen (8)

Ein Kartenspiel besteht aus 32 Karten in den 4 „Farben“ Kreuz, Pik, Herz und Karo. Zu jeder Farbe gibt es 8 Karten, nämlich As (11), König (4), Dame (3), Bube (2), Zehn (10), Neun (9), Acht (8) und Sieben (7). Die in Klammern angegebene Zahl gibt den Wert der jeweiligen Karte an.

Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd Karten ohne Zurücklegen aus dem Spiel: Der Spieler, der zuerst ein As zieht, hat gewonnen. A beginnt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A nach spätestens fünf Ziehungen gewinnt? (3)
- A zahlt 1 € Einsatz und erhält 3 € Auszahlung, wenn er nach spätestens fünf Ziehungen gewinnt. Die Zufallsvariable Y gibt den Gewinn von A an. Berechne den mittleren zu erwartenden Verlust von A. (2)
- Die Zufallsvariable X gibt die Summe der Kartenwerte aus den ersten beiden Ziehungen an. Berechne $P(X = 7)$ und $P(X = 8)$ (3)

Lösung

$$\begin{aligned}
a) \quad P(A) + P(\bar{A}, \bar{A}, A) + P(\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, A) & & (1) \\
&= \frac{4}{32} + \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{4}{30} + \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{4}{28} & (1) \\
&\approx 0,125 + 0,101 + 0,081 \approx 30,7 \% & (1) \\
b) \quad E(Y) &= 2 \cdot 0,307 - 1 \cdot 0,693 = -0,08 \text{ €} & (2) \\
c) \quad P(X = 7) &= P(K, D) + P(D, K) = 2 \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} \approx 3,2 \% & (1,5) \\
P(X = 8) &= P(K, K) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \approx 1,2 \% & (1,5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Ziehen ohne Zurücklegen mit Zufallsvariablen und Spielabbruch (12)

In einer Urne sind 5 rote, 8 grüne und 12 weiße Kugeln.

- Es werden nacheinander zwei Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Keine Kugel ist rot (1)
B: Beide Kugeln haben die gleiche Farbe (2)
C: Die erste Kugel ist rot **oder** die zweite Kugel ist grün. (2)
- Es wird so lange eine Kugel gezogen und beiseite gelegt, bis eine rote gezogen wird. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der dazu notwendigen Ziehungen.
Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ und $P(X = 2)$. (1)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mindestens 4-mal ziehen muss? (1)
Ein Spieler zahlt 1 € Einsatz und bekommt 3 €, wenn die 1. Kugel rot ist, 2 €, wenn die 2. Kugel rot ist und noch 1 €, wenn die 3. Kugel rot ist. Nach 3 Ziehungen endet das Spiel. Berechne den mittleren zu erwartenden Gewinn bzw. Verlust des Spielers pro Spiel. (2)
- Mit einem Griff werden zwei Kugeln gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
D: Beide Kugeln sind grün (1)
E: Mindestens eine Kugel ist weiß. (2)

Lösung:

$$a) P(A) = P(\bar{r}, \bar{r}) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{19}{30} \approx 63,3 \% \quad (1)$$

$$P(B) = P(r, r) + P(g, g) + P(w, w) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{26}{75} \approx 34,67 \% \quad (2)$$

$$P(C) = P(r, \dots) + P(\dots, g) - P(r, g) = \frac{5}{25} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{8}{24} - \frac{5}{25} \cdot \frac{8}{24} = \frac{7}{15} \approx 46,7 \% \quad (2)$$

$$b) P(X = 1) = P(r) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 20 \% \quad (0,5)$$

$$P(X = 2) = P(\bar{r}, r) = \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{6} \approx 16,7 \% \quad (0,5)$$

$$P(X = 3) = P(\bar{r}, \bar{r}, r) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{5}{23} = \frac{19}{138} \approx 13,8 \%$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,20 - 0,167 - 0,138 \approx 49,5 \%$$

$$\text{oder } P(X \geq 4) = P(\bar{r}, \bar{r}, \bar{r}) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} \approx 49,5 \% \quad (1)$$

$$Y = \text{Gewinn des Spielers pro Spiel} \Rightarrow E(Y) = 2 \text{ €} \cdot 0,20 + 1 \text{ €} \cdot 0,167 + 0 \text{ €} \cdot 0,138 - 1 \text{ €} \cdot 0,495 = 0,07 \text{ €} \quad (2)$$

$$c) P(D) = P(g, g) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{75} \approx 9,3 \% \quad (1)$$

$$P(E) = P(w, w) + P(w, \bar{w}) + P(\bar{w}, w) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{13}{24} + \frac{13}{25} \cdot \frac{12}{24} = \frac{37}{50} = 74 \% \quad (2)$$

Aufgabe 6: Ziehen ohne Zurücklegen mit Zufallsvariablen und Spielabbruch (20)

Eine 6. Klasse will bei einem Schulfest mit einem Glücksspiel Geld für einen sozialen Zweck einnehmen. Es wird ein Behälter aufgestellt, der 5 rote, 3 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält. Ein Spieler zahlt einen bestimmten Einsatz und darf dann zweimal ohne Zurücklegen ziehen. Die folgenden Varianten werden diskutiert:

A: Ein Spieler erhält einen Gewinn, wenn beide Kugeln schwarz sind.

B: Ein Spieler erhält einen Gewinn, wenn eine Kugel weiss und eine Kugel schwarz ist.

C: Ein Spieler erhält einen Gewinn, wenn keine Kugel rot ist.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$.

b) Die Klasse beschliesst, dass es in jedem der drei Fälle A, B und C eine Auszahlung geben soll und malt ein Werbeplakat, auf dem steht, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit mehr als 35 % beträgt. Stimmt das?

c) Nach dem Einspruch des Rektorats wird das Plakat wieder abgehängt und Fall C gestrichen. Der Einsatz wird auf 3 CHF festgelegt und die Auszahlungen für die Fälle A und B sollen im Verhältnis 3:1 stehen. Wie hoch müssen die Auszahlungen sein, damit die Klasse nach 100 Spielen mit einem Gewinn von 20 CHF rechnen kann?

d) Ladina will auf Nummer sicher gehen und sich von vornherein so viele Spiele kaufen, dass sie mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal Gewinn B erhält. Wie viele Spiele muss sie kaufen?

e) Remo lässt es drauf ankommen und spielt einfach so lange, bis Ereignis B eintritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nach genau 4 Spielen Erfolg?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nach spätestens 4 Spielen Erfolg?

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss Remo höchstens 20 mal spielen?

$$\text{Hinweis: } x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

h) Mit wie vielen Spielen muss Remo im Mittel rechnen, bis er gewinnt?

$$\text{Hinweis: } x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

Lösungen

$$a) P(A) = P(s, s) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45} \approx 2,2 \% \quad (1)$$

$$b) P(B) = P(w, s) + P(s, w) = \frac{6}{90} + \frac{6}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 13,3 \% \quad (1)$$

$$P(C) = P(w, w) + P(w, s) + P(s, w) + P(s, s) = \frac{6}{90} + \frac{6}{90} + \frac{6}{90} + \frac{2}{90} = \frac{20}{90} \approx 22,2 \% \quad (1)$$

c) Die Werbeaussage stimmt leider nicht, denn C schliesst A und B ein und daher ist die gesamte Gewinnwahrscheinlichkeit $P(C) = 22,2\%$! (1)

d) a und b seien die Auszahlungen für A und B in CHF.
Wenn X die Zufallsvariable für die Auszahlung in CHF ist, so muss gelten $X(A) = 3b$ und $X(B) = b$. (1)

Die zu erwartende Auszahlung pro Spiel ist dann $E(X) = P(A) \cdot X(A) + P(B) \cdot X(B) = \frac{1}{5}b$. (1)

Mit $3,00 - 0,20 = E(X) \Leftrightarrow 2,80 = \frac{1}{5}b$ erhält man $X(b) = b = 14$ CHF und $X(A) = 52$ CHF. (1)

e) Mit dem gewünschten Ereignis $D_n = \text{„mindestens einmal B in n Spielen“}$ muss gelten

$$0,95 < P(D_n) = 1 - P(\text{keinmal B}) = 1 - \left(\frac{13}{15}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{13}{15}\right)^n < 0,05 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{13}{15}\right)} \approx 20,93,$$

d.h., sie muss mindestens 21 Spiele kaufen! (3)

f) $P(4 \text{ Spiele}) = P(\text{nicht B, nicht B, nicht B, B}) = \left(\frac{13}{15}\right)^3 \cdot \frac{2}{15} \approx 8,68\%$. (2)

g) Wenn Y die Zufallsvariable für die Spieldauer ist, wenn im Fall von A abgebrochen wird, so ist

$$P(Y = 1) = \frac{2}{15}, P(Y = 2) = \frac{13}{15} \cdot \frac{2}{15}, P(Y = 3) = \left(\frac{13}{15}\right)^2 \cdot \frac{2}{15}, \text{ usw.}$$

$$\Rightarrow P(\text{höchstens 4 Spiele}) = P(Y = 1) + \dots + P(Y = 4) = \frac{2}{15} \left(1 + \frac{13}{15} + \left(\frac{13}{15}\right)^2 + \left(\frac{13}{15}\right)^3\right) \approx 43,58\% \quad (2)$$

h) $P(\text{höchstens 20 Spiele}) = P(Y = 1) + \dots + P(Y = 20)$

$$= \frac{2}{15} \left(1 + \frac{13}{15} + \left(\frac{13}{15}\right)^2 + \dots + \left(\frac{13}{15}\right)^{19}\right) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1 - \left(\frac{13}{15}\right)^{20}}{1 - \frac{13}{15}} = 1 - \left(\frac{13}{15}\right)^{20} \approx 94,28\%. \quad (2)$$

i) $E(Y) = 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + \dots$ (1)

$$= \frac{2}{15} \left(1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{13}{15} + 3 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^2 + \dots\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{13} \left(1 \cdot \frac{13}{15} + 2 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{13}{15}\right)^3 + \dots\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{13} \cdot \frac{\frac{13}{15}}{\left(1 - \frac{13}{15}\right)^2} = 3,75 \approx 4 \text{ Spiele.} \quad (1)$$