3.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

3.2.1. Baumdiagramme und Zufallsvariablen für mehrstufige Experimente

Beispiel: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 1 (Asterix: der Seher)

Produktregel
Im Baumdiagramm erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch **Multiplikation aller Wahrscheinlichkeiten des Pfades**, der auf das gewünschte Ergebnis führt.

Übungen: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 2 - 15

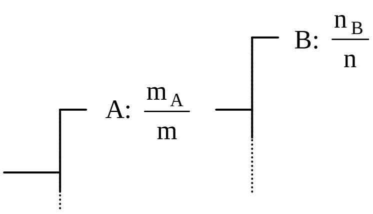
3.2.2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit bei mehrstufigen Experimenten

Beispiel: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 16

Produktregel und bedingte Wahrscheinlichkeiten
Gegeben sei ein zweistufiges Experiment, bei dem

m = Zahl der möglichen Ergebnisse in Stufe 1
m_a = Zahl der günstigen Ergebnisse für Ereignis A in Stufe 1
n = Zahl der möglichen Ergebnisse in Stufe 2, **falls A in Stufe 1** eingetreten ist
n_B = Zahl der günstigen Ergebnisse für Ereignis B in Stufe 2, **falls A in Stufe 1** eingetreten ist:

Stufe 1 Stufe 2



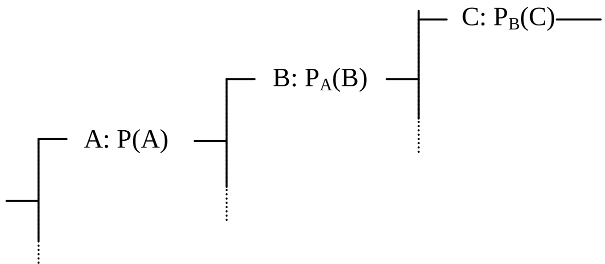
$P(A) = P(A \text{ in Stufe 1}) = \frac{m_A}{m}$

$P_A(B) = P(B \text{ in Stufe 2, } \textbf{falls } A \text{ in Stufe 1}) = \frac{n_B}{n}$

$\mathbf{P(A \cap B)} = P(A \text{ in Stufe 1 } \textbf{und } B \text{ in Stufe 2}) = \frac{m_A}{m} \cdot \frac{n_B}{n} = \mathbf{P(A) \cdot P_A(B)}$

Entsprechend gilt bei dreistufigen Experimenten:

Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3



$\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_a(B) \cdot P_B(C)}$

Unabhängigkeit von Ereignissen
zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn

1. $P_A(B) = P(B)$ (B ist unabhängig von A) oder
2. $P_B(A) = P(A)$ (A ist unabhängig von B) oder
3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Die drei Bedingungen sind **äquivalent**, d.h. es genügt, eine der drei Bedingungen zu überprüfen!

Übungen: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 17 - 21

3.2.3. Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Experimenten

Beispiel: Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit (vgl. Aufgabe 17)
Eine Statistik hat folgende Ergebnisse zutage gebracht: 52 % der Bevölkerung sind weiblich. 36 % der Frauen und 32 % der Männer geben Rot als Lieblingsfarbe an; 16 % der Frauen und 53 % der Männer bevorzugen Blau und der jeweilige Rest entschied sich für Grün.

a) Zeichne einen Ereignisbaum mit Stufe 1 = Geschlechtswahl und Stufe 2 = Farbwahl
b) Zeichne einen Ereignisbaum mit Stufe 1 = Farbwahl und Stufe 2 = Geschlechtswahl
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person weiblich ist **und** ihre Lieblingsfarbe Grün ist?
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die Lieblingsfarbe Grün angibt?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine weibliche Person die Lieblingsfarbe Grün hat?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit Lieblingsfarbe Grün weiblich ist?

Lösung

a)

Stufe 1	Stufe 2		
w: 0,52	r: 0,36	⇒	$P(w \cap r) = 0{,}187$
	b: 0,16	⇒	$P(w \cap b) = 0{,}083$
	g: 0,48	⇒	$P(w \cap g) = 0{,}250$
m: 0,48	r: 0,32	⇒	$P(w \cap r) = 0{,}154$
	b: 0,53	⇒	$P(w \cap b) = 0{,}254$
	g: 0,15	⇒	$P(w \cap g) = 0{,}072$

$P(r) = 0{,}34$
$P(b) = 0{,}34$
$P(g) = 0{,}32$

b)

Stufe 1	Stufe 2
r: 0,34	w: 0,55
	m: 0,45
b: 0,34	w: 0,25
	m: 0,75
g: 0,32	w: 0,78
	m: 0,22

c) $P(w \cap g) = P(w) \cdot P_w(g) = 0{,}52 \cdot 0{,}48 = \underline{0{,}250}$

d) $P(g) = P(w \cap g) + P(m \cap g) = 0{,}250 + 0{,}072 = \underline{0{,}32}$

e) $P(g) \cdot P_g(w) = P(w \cap g) \Rightarrow P_g(w) = \dfrac{P(w \cap g)}{P(g)} = \dfrac{0{,}250}{0{,}32} = \underline{0{,}78}$

f) $P_w(g) = \underline{0{,}48}$ (war gegeben!)

Summenregel und totale Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Ereignissen
Um eine **totale Wahrscheinlichkeit P(A)** zu berechnen, addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse (Pfade), die auf das gewünschte Ereignis führen, z.B.

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(C) \cdot P_C(A)$$

Um eine **bedingte Wahrscheinlichkeit $P_D(A)$** zu berechnen, löst man die entsprechende Gleichung der Produktregel auf, z.B.

$$P(D) \cdot P_D(A) = P(D \cap A) \quad | : P(D)$$

$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

Übungen: *Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 22 - 24*