3.3. Aufgaben zur hypergeometrischen Verteilung

Aufgabe 1: Kombinatorik
Aus einer Urne mit 10 verschiedenen Kugeln wird 4 mal gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es
a) **mit** Zurücklegen
b) **ohne** Zurücklegen?

Aufgabe 2: Kombinatorik
a) Ein Auto kann mit 3 verschiedenen Motoren, 5 verschiedenen Karosserievarianten und 8 verschiedenen Farben ausgestattet werden. Wie viele verschiedene Modellvarianten gibt es insgesamt.?
b) Bei einem multiple-choice-test z.B. in der theoretischen Fahrprüfung stehen hinter den ersten 3 Fragen jeweils 3 Kästchen, hinter den folgenden 4 Fragen jeweils 2 Kästchen und hinter den letzten 3 Fragen jeweils 4 Kästchen. Wie viele Antwortmöglichkeiten gibt es, wenn jeweils nur ein Kästchen angekreuzt werden darf?
c) Wie viele Kombinationen gibt es bei einem Fahrradschloss mit drei Stellringen, die jeweils die Ziffern 1 - 9 tragen?
d) Wie viele sechsstellige Zahlen enthalten jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 genau einmal ?
e) Bei einem Fest treten 4 Gruppen auf; die Reihenfolge ist jedoch noch nicht bekannt. Wie viele verschiedenen Reihenfolgen sind möglich?

Aufgabe 3: Kombinatorik
In einer Schule wird der Stundenplan für eine Klasse gemacht. Wie viele Möglichkeiten gibt es, an einen Vormittag mit 6 Schulstunden unterzubringen:
a) 6 verschiedene Fächer
b) 5 verschiedene Fächer mit je einer Stunde
c) 1 Doppelstunde Mathematik und 4 weitere Fächer
d) 5 verschiedene Fächer, so dass eine Randstunde frei ist
e) 4 verschiedene Fächer mit je einer Stunde?

Aufgabe 4: Kombinatorik
Wie viele „Wörter“ lassen sich aus den folgenden Wörtern durch Umordnen gewinnen:

a) Jan	d) Annette
b) Sven	e) Barbara
c) Peter	f) Ananas

Aufgabe 5: Kombinatorik
Wie viele Sitzordnungen gibt es für 4 Schülern auf 4 Stühlen?
Wie viele Sitzordnungen gibt es in einer Gruppe mit 4 Schülern und 6 Stühlen
a) wenn man darauf achtet, welche Person auf welchem Platz sitzt
b) wenn man nur darauf achtet, welche Plätze besetzt sind?

Aufgabe 6: Kombinatorik
Auf wie viele Arten lassen sich die 4 Buchstaben des Wortes „Moni“ anordnen?
Moni hat 8 Farbstifte, um jeden Buchstaben ihres Vornamens in anderer Farbe zu schreiben. Wie viele Möglichkeiten hat sie,
a) wenn man darauf achtet, welcher Buchstabe welche Farbe erhält,
b) wenn man nur darauf achtet, welche Farben verwendet wurden?

Aufgabe 7: Kombinatorik
a) Wie viele 4-elementige Teilmengen hat eine Menge mit 10 Elementen?
b) Wie viele k-elementige Teilmengen hat eine Menge mit n Elementen?
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 von 10 Stühlen zu besetzen?
d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim zehnmaligen Münzwurf genau fünfmal „Zahl“ zu werfen?
e) Wie viele verschiedene Ziffernkombinationen gibt es beim Lotto, wenn 6 Kugeln aus einer Lostrommel mit 49 Kugeln gezogen werden?
f) Wie viele verschiedene Blätter gibt es beim Skatspiel, wenn ein Spieler 11 von 32 Karten erhält?
g) Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Sechsergruppe aus einer Klasse mit 22 Schülern auszuwählen?

Aufgabe 8: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung
Aus einer Urne mit 49 Kugeln werden 6 Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung der Zahlen 1 - 6 in **aufsteigender Reihenfolge**?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung der Zahlen 1 - 6 in **beliebiger Reihenfolge**? („sechs richtige“)
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **genau eine** der Zahlen 1 - 6 dabei ist? („eine richtige“)
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **genau zwei** der Zahlen 1 - 6 dabei sind? („zwei richtige“)
e) Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X, die die Zahl der Kugeln 1 - 6 unter der gezogenen 6 Kugeln angibt („X richtige“)
f) Wieviele „richtige“ kann man beim jahrelangen Lottospiel im Mittel erwarten?

Aufgabe 9: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung
Unter 50 Glühbirnen in einem Karton befinden sich 5 defekte. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Birnen getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle 3 defekt sind
b) genau 2 defekt sind
c) genau eine defekt ist
d) keine defekt ist.
e) Wieviele defekte Birnen sind bei dieser Stichprobe im Mittel zu erwarten?

Aufgabe 10: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung
Unter den 20 Schülern einer Klasse werden 5 für die Teilnahme an einem USA-Austausch ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna und ihre Freundin Lisa beide dabei sind?

Aufgabe 11: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung
An einem Kindergeburtstag nehmen 8 Mädchen und 5 Jungen teil. Für die Schnitzeljagd wird eine Gruppe aus 4 Kindern per Los bestimmt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Gruppe

a) nur aus Mädchen b) nur aus Jungen c) aus 2 Mädchen und 2 Jungen

3.3. Lösungen zu den Aufgaben zur hypergeometrischen Verteilung

Aufgabe 1: Kombinatorik

a) 10^4 = 10 000 Möglichkeiten
b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ = 5 040 Möglichkeiten

Aufgabe 2: Kombinatorik

a) 10^4 = 10 000 Möglichkeiten
b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ = 5040 Möglichkeiten
c) 9^3 = 729 Möglichkeiten
d) $3 \cdot 5 \cdot 8$ = 120 Modellvarianten
e) $3^3 \cdot 2^4 \cdot 4^3$ = 27 648 Möglichkeiten
f) $10 \cdot 9 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ = 3 628 800 Sitzordnungen
g) $6!$ = 720 Zahlen

Aufgabe 3: Kombinatorik

a) $6!$ = 720 Möglichkeiten
b) $6!$ = 720 Möglichkeiten
c) $5!$ = 120 Möglichkeiten
d) $6! = 2 \cdot 5!$ = 240 Möglichkeiten
e) $6! = \frac{6!}{2!}$ = 360 Möglichkeiten

Aufgabe 4: Kombinatorik

a) $3!$ = 6 Möglichkeiten
b) $4!$ = 24 Möglichkeiten
c) $\frac{5!}{2!}$ = 60 Möglichkeiten
d) $\frac{7!}{2!\,2!\,2!}$ = 630 Möglichkeiten
e) $\frac{7!}{3!\,2!\,2!}$ = 210 Möglichkeiten
f) $\frac{6!}{3!\,3!}$ = 20 Möglichkeiten

Aufgabe 5: Kombinatorik

a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ = 360 Sitzordnungen
b) $\binom{6}{4}$ = 15 Möglichkeiten

Aufgabe 6: Kombinatorik

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ = 1680 Sitzordnungen
b) $\binom{8}{4}$ = 70 Möglichkeiten

Aufgabe 7: Kombinatorik

a) $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ = 210 Möglichkeiten
b) $\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten
c) $\binom{10}{5}$ = 252 Möglichkeiten
d) $\binom{10}{3}$ = 120 Möglichkeiten
e) $\binom{49}{6}$ = 13 983 816 Möglichkeiten
f) $\binom{32}{11}$ = 129 024 480 Möglichkeiten
g) $\binom{21}{6}$ = 54 264 Möglichkeiten

Aufgabe 8: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung

a) $P(1, 2, 3, 4, 5, 6) = \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{47} \cdot \frac{1}{46} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{1}{44} \approx 10^{-10}$

b) $P(\text{6 richtige}) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = 13\,983\,816^{-1}$

c) $P(\text{1 richtige}) = \binom{6}{1} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot \frac{42}{47} \cdot \frac{41}{46} \cdot \frac{40}{45} \cdot \frac{39}{44} = 41{,}3\ \%$

d) $P(\text{2 richtige}) = \binom{6}{2} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{43}{47} \cdot \frac{42}{46} \cdot \frac{41}{45} \cdot \frac{40}{44} = 13{,}2\ \%$

e) $P(\text{3 richtige}) = \binom{6}{3} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{42}{45} \cdot \frac{41}{44} = 1{,}76\ \%$

$P(\text{4 richtige}) = \binom{6}{4} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{43}{45} \cdot \frac{42}{44} = 0{,}097\ \%$

$P(\text{5 richtige}) = \binom{6}{5} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{43}{44} = 0{,}0018\ \%$

f) $E(X) \approx 0{,}73$

Aufgabe 9: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung

k defekte Birnen	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\binom{3}{0} \cdot \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} = 0{,}72$	$\binom{3}{1} \cdot \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{5}{48} = 0{,}25$	$\binom{3}{2} \cdot \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} = 0{,}02$	$\binom{3}{3} \cdot \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} = 0{,}0005$

$\Rightarrow$ $E(X) = 0{,}29$, d.h., es ist in jeder 3. oder 4. Stichprobe eine defekte Birne zu erwarten.

Aufgabe 10: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{19} \approx 5{,}2\%$

Aufgabe 11: Ziehen ohne Zurücklegen und hypergeometrische Verteilung

a) $P(\text{nur Jungen}) = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}7\ \%$

b) $P(\text{nur Mädchen}) = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = 9{,}7\ \%$

c) $P(\text{2 Mädchen und 2 Jungen}) = \binom{4}{2} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = 39{,}2\ \%$