3.3. Prüfungsaufgaben zur Binomialverteilung

Aufgabe 1: Kombinatorik
Eine Speisekarte verzeichnet 4 Vorspeisen, 7 Hauptgerichte und 6 Nachtische. Wie viele verschiedene Menüs kann man sich zusammenstellen?

Lösung:
$4 \cdot 7 \cdot 6 = 168$ Menüs

Aufgabe 2: Kombinatorik
In einem leeren Eisenbahnabteil mit 6 Plätzen nehmen 4 Personen Platz. Auf wie viele Arten ist dies möglich,
a) wenn man darauf achtet, welche Person auf welchem Platz sitzt?
b) wenn man nur darauf achtet, welche Plätze besetzt sind

Lösung:
a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Sitzordnungen
b) $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten

Aufgabe 3: Kombinatorik
Eine Firma hat 7 Parkplätze und 4 Autos. Auf wie viele verschiedene Arten können die Autos geparkt werden,
a) wenn man darauf achtet, welches Auto auf welchem Platz steht?
b) wenn man nur darauf achtet, welche Plätze besetzt steht?

Lösung:
a) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ Sitzordnungen
b) $\binom{7}{4} = 35$ Möglichkeiten

Aufgabe 4: Binomialverteilung beim Münzwurf
Eine ideale Münze wird 10 mal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 8 mal die „Kopf“ oben liegt?

Lösung
$B_{10,0,5}(8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 = 45 \cdot 0{,}5^{10} = 0{,}044 = 4{,}4\ \%$

Aufgabe 5: Binomialverteilung beim Würfeln
Ein idealer Würfel wird 5 mal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 4 mal die 5 oder die 6 gewürfelt werden?

Lösung
$B_{5,2/6}(4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 5 \cdot \frac{2}{3^5} = 0{,}041 = 4{,}1\ \%$

Aufgabe 6: Binomialverteilung bei der Brownschen Molekularbewegung
Ein Heliumatom legt jede Sekunde eine Strecke von insgesamt 6 m in vertikaler Richtung zurück. Pro Sekunde finden 60 Stöße mit anderen Teilchen statt, die in durchschnittlich der Hälfte aller Fälle die Bewegungsrichtung umkehren Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Heliumatom nach einer Sekunde um 2 m gestiegen?

Lösung
$B_{60,0,5}(40) = \binom{60}{40} \cdot 0{,}5^{40} \cdot 0{,}5^{20} = 45 \cdot 0{,}5^{10} = 0{,}036 = 3{,}6\ \%$

Aufgabe 7: Binomialverteilung bei Qualitätskontrolle
Eine Maschine produziert Teile in 15 Qualitätsstufen, von denen die 3 untersten Stufen Ausschuß bedeuten. Pro Tag werden 200 Teile produziert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass davon **höchstens** 50 unbrauchbar sind?

Lösung
$P(X \leq 50) = F_{200,3/15}(50) = F_{200,0,2}(50) = 0,53 = 53$ % (Tabelle S. 182)

Aufgabe 8: Binomialverteilung bei Qualitätskontrolle (14)
Einem Elektrohändler Meier wird eine Kiste mit 1000 Glühbirnen aus Restbeständen zu einem Sonderpreis angeboten. Der Kauf lohnt sich aber nur, wenn nicht mehr als 10 % der Birnen defekt sind. Herr Meier muß sich schnell entscheiden und prüft 10 Birnen. Wir nehmen an, dass tatsächlich genau 10 % der Birnen in der Kiste defekt sind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt Herr Meier
- ausschließlich gut Birnen? (1)
- genau eine defekte Birne? (2)
- gleich beim ersten Mal eine defekte Birne? (2)
- mehr als eine defekte Birne? (2)

b) Wieviele defekte Birnen sind in der Stichprobe aus 10 Exemplaren zu erwarten? (1)
c) Herr Meier lehnt die Kiste ab, wenn mehr als k = 2 defekte Birnen dabei sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm das Geschäft entgeht, obwohl die Ausschussrate in Ordnung ist? (3)
d) Wie groß muss die Zahl k gewählt werden, damit die Ablehnungswahrscheinlichkeit kleiner als 5 % ist ? (3)

Lösung:

X sei die Zahl der defekten Birnen $\Rightarrow P(X = k) = B_{10\ 0,1}(k)$

a) $P(X = 0) = 0,9^{10} = 34,8$ % (1)
$P(X = 1) = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{9} = 38,7$ % (2)
P(defekte Birne bei der 1. Ziehung) = 0,1 = 10 % (2)
$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,348 - 0,387 = 26,4$ % (2)

b) $E(X) = 10 \cdot 0,1 = 1$ (1)

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,348 - 0,387 - 0,193 = 7,1$ % (3)

d) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1,8 \% \Rightarrow k = 3$ (3)

Aufgabe 9: Binomialverteilung bei Verkehrskontrolle(14)
Eine Ortsdurchfahrt wird erfahrungsgemäß von 65 % PKW, 20 % LKW, 10 % Bussen und 5 % Motorrädern benutzt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei 12 vorbeikommenden Fahrzeugen
- weder Busse noch Motorräder (1)
- genau drei LKW (1)
- genau vier Busse (1)
- höchstens ein Motorrad (2)
- mindestens zehn PKW (2)

b) Wie viele Fahrzeuge müssen mindestens vorbeifahren, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Bus dabei ist, größer als 92 % sein soll? (2)
c) Wie viele Fahrzeuge können höchstens vorbeifahren, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Motorrad dabei ist, kleiner als 2 % sein soll? (2)
d) Wie viele Fahrzeuge müssen vorbeifahren, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Motorrad dabei ist, genauso groß wein soll, wie die Wahrscheinlichkeit, dass kein Motorrad dabei ist ? (2)
e) Wieviel Motorräder sind zu erwarten, wenn man 20 Fahrzeuge vorbeifahren lässt? (1)

Lösung

a) - P(weder Busse noch Motorräder) = $0,85^{12} = 0,142$ (1)

- P(genau drei LKW) = $\binom{12}{3} 0,2^{3} \cdot 0,8^{9} = 0,236$ (1)

- P(genau vier Busse) = $\binom{12}{4} 0,1^{4} \cdot 0,9^{8} = 0,021$ (1)

- P(höchstens ein Motorrad) = $\binom{12}{0} 0,95^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0,05^{1} \cdot 0,95^{11} = 0,882$ (2) (2)

- P(mindestens zehn PKW) = $\binom{12}{10} \cdot 0,35^{2} \cdot 0,65^{10} + \binom{12}{11} \cdot 0,35^{1} \cdot 0,65^{11} + \binom{12}{12} \cdot 0,35^{0} \cdot 0,65^{12} = 0,151$ (2)

b) $P(X \geq 1) > 0,92 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0,08$ mit $p = 0,1 \Rightarrow 0,9^{n} < 0,08 \Rightarrow n > \dfrac{\ln 0,08}{\ln 0,9} = 23,9 \Rightarrow n \geq 24.$ (2)

c) $P(X = 0) < 0,02$ mit $p = 0,05 \Rightarrow 0,95^n < 0,02 \Rightarrow n < \frac{\ln 0,02}{\ln 0,95} = 76,2 \Rightarrow n \le 76$. (2)

d) $P(X = 0) = P(X = 1)$ mit $p = 0,05 \Rightarrow 0,95^n = n \cdot 0,05 \cdot 0,95^{n-1} \Rightarrow n = \frac{0,95}{0,05} = 19$ (2)

e) $E(X) = np = 20 \cdot 0,05 = 1$ Motorrad im Durchschnitt. (1)

Binomialverteilung bei Verkehrskontrolle

Die Anwohner einer Ortsdurchfahrt beklagen sich über vorbeirasende Autos. Es soll daher untersucht werden, welcher Anteil p der Autofahrer die Geschwindigkeitsbeschränkung überschreitet. Man nimmt an, daß die Autofahrer unabhängig voneinander die Geschwindigkeitsbeschränkung entweder einhalten oder nicht einhalten.

Teil 1 (10)

Im Berufsverkehr ist p = 20 %. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 10 vorbeifahrenden Autos

a) genau 7 nicht zu schnell fahren. (2)
b) nur das 4. und das 7. Auto die zugelassene Höchstgeschwindigkeit überschreiten. (2)
c) die ersten 3 Autos die Geschwindigkeitsbeschränkung einhalten, trotzdem aber genau 2 Autos zu schnell fahren. (3)
d) mehr als 5 Autos zu schnell fahren. (3)

Lösung

X = Zahl der Geschwindigkeitsüberschreiter $\Rightarrow P(X = k) = B_{10;\,0,2}(k)$. Außerdem bedeuten ü = überschritten und nü = nicht überschritten.

$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 20,1\ \%$ (2)

P(4. ü und 7. ü) = $0,2^2 = 4\ \%$ (2)

P(1. - 3. nü und 2 aus 4. - 10. ü) = $0,8^3 \cdot \binom{7}{2}\, 0,2^2 \cdot 0,8^5 = 14,1\ \%$ (3)

$P(X > 5)) = 1 - P(X \le 5) = 0,64\ \%$ (Tabelle oder GTR) (3)

Teil 2 (5)

Wie groß darf der Anteil der Geschwindigkeitsüberschreiter höchstens sein, wenn mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit keines von 100 vorbeifahrenden Autos die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreitet?

Lösung

X = Zahl der Geschwindigkeitsüberschreiter $\Rightarrow P(X = k) = B_{100;\,0,2}(k)$

$P(X = 0) > 0,95 \Leftrightarrow (1 - p)^{100} > 0,95 \Leftrightarrow p < 1 - \sqrt[100]{0,95} \approx 0,051\ \%$ (5)

Teil 3 3 (8)

In den Abendstunden ist p = 15 %. Die Polizei kontrolliert 50 Autos.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens das letzte Auto die Geschwindigkeitsbeschränkung überschreitet? (3)
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Geschwindigkeitsüberschreiter um mehr als 25 % von der zu erwartenden Anzahl ab? (5)

Lösung

a) P(die ersten 49 mal nü) = $0,85^{49} = 0,035\ \%$ (3)
b) $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,15 = 7,5$. (1)
Abweichung 25 % = $0,25 \cdot 7,5 = 1,875$ (1)
P(Abweichung größer als 25 %) = 1 − P(Abweichung höchstens 25 %) = $1 - P(5,625 \le X \le 9,375)$ (1)
$= 1 - P(6 \le X \le 9)$ (1)
$= 1 - P(X \le 9) + P(X \le 5) = 42,8\ \%$ (Tabelle oder GTR) (1)

Teil 4 (7)

Das Landratsamt will den Polizeietat erhöhen, wenn p mehr als 15 % beträgt. Dazu sollen bei 1000 Autos Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt werden.

Der Polizeietat wird erhöht, wenn mehr als k Autos die Höchstgeschwindigkeit überschreiten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Polizeietat erhöht wird, obwohl p kleiner oder gleich 15 % ist, soll weniger als 5 % betragen.

Wie groß muss dann k mindestens gewählt werden?

Lösung

$P(X > k) < 0{,}05$ (1)

$\Leftrightarrow 1 - P(X \le k) < 0{,}05 \Leftrightarrow P(X \le k) > 0{,}95$ (1)

Näherung durch die Normalverteilung mit $\mu = np = 150$ und $\sigma = \sqrt{npq} = 11{,}29$ (2)

$\Rightarrow \phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) > 0{,}95$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{k-150}{11{,}29} > 1{,}65 \Leftrightarrow k > 168{,}63 \Rightarrow k \ge 169.$ (2)

Binomialverteilung bei Qualitätskontrolle

Ein Limonaden-Abfüllbetrieb verwendet Pfandflaschen. Von den zurückgenommenen Flaschen sind erfahrungsgemäß 0,3 % wegen zu starker Verschmutzung und 0,9 % wegen Glasschäden nicht mehr verwendbar.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig herausgegriffene Flasche wieder verwendbar?

Für die Aufgabenteile b) und c) gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Flasche nicht mehr verwendbar ist, beträgt 1 %.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle 12 Flaschen einer Kiste wieder verwendbar?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine solche 12er Kiste
- höchstens eine nicht mehr verwendbare Flasche?
- mindestens drei nicht mehr verwendbare Flaschen?

c) Durch eine automatische Prüfanlage sollen die nicht wieder verwendbaren Flaschen aussortiert werden. Diese Anlage lässt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,5 % eine nicht mehr verwendbare Flasche als wieder verwendbar passieren und sondert mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 % eine wieder verwendbare Flasche fälschlicherweise aus.
Die Anlage hat eine Flasche ausgesondert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Flasche tatsächlich nicht mehr verwendbar?
Eine Flasche wurde durch die Anlage nicht aussortiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Flasche trotzdem nicht mehr verwendbar?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 12 Flaschen, die die Anlage nicht aussortiert hat, alle wieder verwendbar?

d) Eine vorhandene Reinigungsanlage soll überholt werden, falls der Anteil der Flaschen, die wegen verbliebener Schmutzreste nicht mehr verwendbar sind, den Wert von 0,3 % übersteigt. Wie viele nicht sauber gewordene Flaschen müssen unter 12000 Flaschen mindestens vorhanden sein, damit das Kriterium für die Überholung der Reinigungsanlage auf einem Signifikanzniveau von 5% erfüllt ist?

baccalauréat Amérique du Nord Juin 1999 Série L

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique
- 60 % des eleves pratiquent un instrument à cordes (instrument C) ;
- 45 % pratiquent un instrument à vent (Instrument V) ;
- 10 % pratiquent un instrument à cordes et un Instrument à vent.

1. On choisit au hasard un élève du conservatoire.

a) Quelle est la probabilité de l’événement : « cet élève pratique au moins un des instruments considérés » ? (0,5 POINT)

b) Quelle est la probabilité de l’événement: « cet élève pratique un et un seul des instruments considérés » ? (0,5 POINT)

2. On choisit, au hasard, un élève pratiquant un Instrument C.

Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un Instrument V ? (1 POINT)

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d’élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.

a) Quelle est la probabilité p_n qu' au moins un des élèves choisis pratique un Instrument C ? (1 POINT)

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \ge 0{,}999$. Justifier. (1 POINT)