

4.1. lineare Funktionen

4.1.1. Das kartesische Koordinatensystem

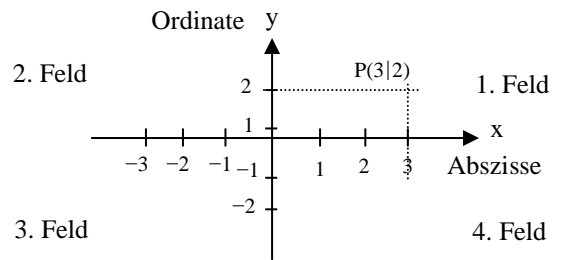
Definition:

Zahlenpaare $(x|y)$ werden häufig in einem **kartesischen** (nach René Descartes 1637) Koordinatensystem veranschaulicht. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

Ursprung (Origo (lat) = Ursprung) = $O(0|0)$

Abszisse (abscindere (lat) = abtrennen) = x-Wert

Ordinate (ordinare (lat) = ordnen) = y-Wert



Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 1

4.1.2. Funktionen

Einführung: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 2

Funktionen

Eine Funktion ist eine **eindeutige** Vorschrift, die jedem Element x der **Definitionsmenge** D genau ein Element $y = f(x)$ der **Wertemenge** W zuordnet. Die Vorschrift $y = f(x)$ wird auch **Funktionsgleichung** genannt. Trägt man alle **Argumente** x mit ihren zugehörigen **Werten** $y = f(x)$ in eine **Tabelle** ein, so erhält man die **Wertetabelle**. Trägt man alle Paare $(x|y) = (x|f(x))$ als Punkte in ein rechtwinkliges **Koordinatensystem** ein, so erhält man den **Graphen** der Funktion.

Beispiel:

Jeder rationalen Zahl x zwischen -5 und 5 wird eine Zahl $g(x)$ zugeordnet. Die Zahl $g(x)$ erhält man, indem man x verdoppelt und anschließend um 3 vermindert.

Diese Zuordnung (**Funktion**) lässt sich beschreiben durch

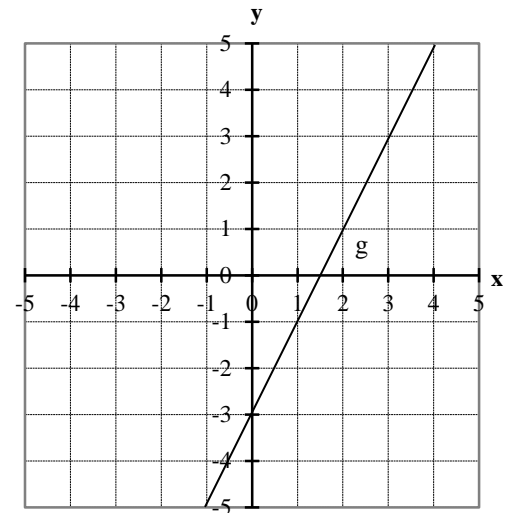
Funktionsgleichung: $g(x) = 2x - 3$

Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{Q} : -5 \leq x \leq 5\}$

Wertemenge: $W = \{y \in \mathbb{Q} : -13 \leq y \leq 7\}$

Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7



Schaubild

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 3 - 5

4.1.3. lineare Funktionen

Definition und Satz über lineare Funktionen

Eine Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = ax + b$ und

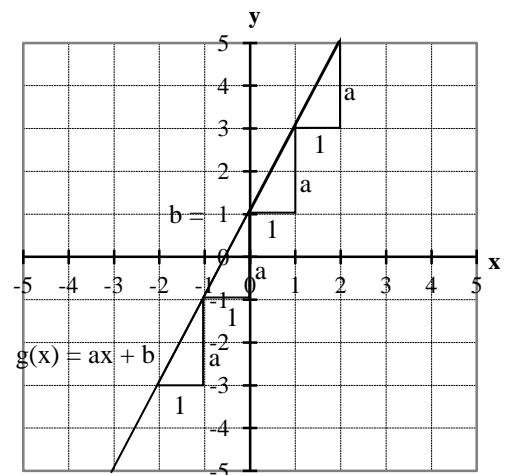
Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**.

Ihr Graph ist eine **Gerade** mit der **Steigung oder Wachstumsrate** a und dem **y-Achsenabschnitt** b , die die y -Achse im Punkt $S_y(0|b)$ schneidet.

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-2a+b	-a+b	b	a+b	2a+b

$\xrightarrow{+1}$ $\xrightarrow{+1}$ $\xrightarrow{+1}$
 $\xleftarrow{+a}$ $\xleftarrow{+a}$ $\xleftarrow{+a}$

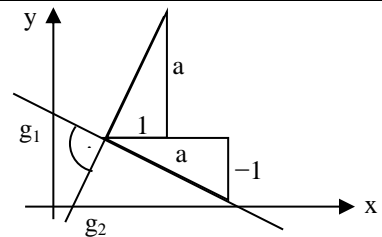


4.1.4. Parallele und orthogonale Geraden

Satz über parallele und orthogonale Geraden

Zwei Geraden $g_1(x) = a_1x + b_1$ und $g_2(x) = a_2x + b_2$ verlaufen

- **parallel** zueinander, falls $a_1 = a_2$
- **orthogonal** zueinander, falls $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.



Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 6

4.1.5. Bestimmung einer Geradengleichung aus gegebenem Punkt und Steigung

Bestimmung einer Geradengleichung aus gegebenem Punkt und Steigung

Ist die Gleichung einer Geraden $y = ax + b$ mit der Steigung a durch den Punkt $P(x_0|y_0)$ gesucht, so bestimmt man den y -Achsenabschnitt b durch **Einsetzen** der Koordinaten x_0 und y_0 und Auflösen nach b :

Beispiel:

Bestimme die Gleichung der Geraden g mit der Steigung 3 durch den Punkt $P(-2|1)$

Lösung:

Einsetzen von $a = 3$, $x_0 = -2$ und $y_0 = 1$ in die Geradengleichung $y = ax + b$ ergibt $1 = 3 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow 1 = -6 + b \Leftrightarrow b = 7$.

Die gesuchte Gleichung ist also $g(x) = 3x + 7$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 7

4.1.6. Bestimmung einer Geradengleichung aus zwei gegebenen Punkten

Bestimmung einer Geradengleichung aus zwei gegebene Punkten

Ist die Gleichung einer Geraden $y = ax + b$ gesucht, die durch zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ verläuft, so setzt man die Koordinaten der beiden Punkte in die Geradengleichung ein: $y_1 = ax_1 + b$ und $y_2 = ax_2 + b$. Man erhält damit **zwei Gleichungen mit zwei Variablen** a und b , die sich mit Hilfe des **Einsetzungs-**, **Gleichsetzungs-** oder **Additionsverfahrens** (siehe 3.0.2. - 3.0.4.) lösen lassen

Beispiel:

Bestimme die Gleichung der Geraden g , die durch die Punkte $P(2|3)$ und $Q(-1|4)$ geht.

Lösung:

Man setzt die Koordinaten der beiden Punkte ein und löst die beiden Gleichungen z.B. mit dem **Additionsverfahren** (siehe 3.0.4.)

$$\begin{array}{l}
 P(2|3): \\
 Q(-1|4): \\
 :
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3 = 2a + b \\
 4 = -a + b \cdot 2 \\
 3 = 2a + b \cdot (-3) \\
 11 = 3b \\
 2 = -6a \\
 11 = 3b : 3 \\
 -\frac{1}{3} = a \\
 \frac{11}{3} = b
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) + \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) + \\
 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
 \end{array}$$

\Rightarrow die gesuchte Gerade hat die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 8

4.1.7. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Schnittpunkt mit der y-Achse

Am Schnittpunkt mit der y-Achse ist $x = 0$.

Die y-Koordinate berechnet sich durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsgleichung.

Beispiel:

Gib den Punkt an, in dem die Gerade $g(x) = 3x + 2$ die y-Achse schneidet.

Lösung:

$$y = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow S_y(0|2)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse

Am Schnittpunkt mit der x-Achse ist $y = 0$.

Die x-Koordinate berechnet sich daher durch Nullsetzen der Funktionsgleichung und Auflösen nach x.

Beispiel:

Gib den Punkt an, in dem die Gerade $g(x) = 3x + 2$ die x-Achse schneidet.

Lösung:

$$0 = 3x + 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = x \Rightarrow S_x(-\frac{2}{3} | 0)$$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 9 und 10

Gemeinsame Punkte von Geraden

Ein gemeinsamer Punkt $S(x|y)$ zweier Geraden $g(x)$ und $h(x)$ liegt vor, wenn beide Geraden den gleichen y-Wert $g(x) = h(x)$ an der Stelle x aufweisen. Man erhält die Koordinaten des Punktes also durch

1. **Gleichsetzen** $g(x) = h(x)$ und Auflösen nach x
2. **Einsetzen** $y = g(x)$ oder $y = h(x) \Rightarrow$ **Probe**

Beispiel:

Gib den Schnittpunkt der beiden Geraden $g(x) = 3x + 2$ und $h(x) = -x - 6$ an.

Lösung:

1. Berechnung von x_0 durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen

$$\begin{array}{rcll} : & 3x + 2 & = & -x - 6 & | +x; -2 \\ & 4x & = & -8 & | :4 \\ & x & = & -2 & \end{array}$$

2. Berechnung von y durch Einsetzen von x

$$\begin{array}{l} y = g(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -4 \text{ oder} \\ y = h(-2) = -(-2) - 6 = -4 \text{ (Probe)} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_{fg}(-2|-4)$$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 11 - 13