4.2. Prüfungsaufgaben zu Achsenschnittpunkten und Scheitelpunkten

Aufgabe 1: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte

Bestimme bei den folgenden Funktionen den Scheitelpunkt und alle Achsenschnittpunkte.

a) $f(x) = x^2 - 10x + 21 \Rightarrow S_y(0|21)$ (1)

$$f(x) = (x - 5)^2 - 4 \Rightarrow S(5|-4) \quad (2)$$

$$f(x) = (x - 3)(x - 7) \Rightarrow S_{x1}(3|0) \text{ und } S_{x2}(7|0) \quad (3)$$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow S_y(0|6)$ (1)

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{1}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = (x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

c) $f(x) = x^2 + 3x - 10 \Rightarrow S_y(0|-10)$ (1)

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{49}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = (x - 2)(x + 5) \Rightarrow S_{x1}(-5|0) \text{ und } S_{x1}(2|0). \quad (2)$$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6 \Rightarrow S_y(0|6)$ (1)

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8 \Rightarrow S(1|8) \quad (2)$$

$$f(x) = -2(x - 3)(x + 1) \Rightarrow S_{x1}(-1|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow S_y(0|1)$ (1)

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x - 1)^2 + \frac{4}{3} \Rightarrow S\left(1 \mid \frac{4}{3}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)(x + 1) \Rightarrow S_{x1}(-1|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{8}{3} \Rightarrow S_y\left(0 \mid \frac{8}{3}\right)$ (1)

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow S\left(-3 \mid -\frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(x + 4) \Rightarrow S_{x1}(-2|0) \text{ und } S_{x2}(-4|0) \quad (2)$$

g) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x - \frac{51}{5} \Rightarrow S_y\left(0 \mid -\frac{51}{5}\right)$ (1)

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 10)^2 - \frac{49}{5} \Rightarrow S\left(10 \mid -\frac{49}{5}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 3)(x - 17) \Rightarrow S_{x1}(3|0) \text{ und } S_{x2}(17|0) \quad (2)$$

h) $f(x) = -\frac{1}{7}x^2 + 2x - \frac{24}{7} \Rightarrow S_y\left(0 \mid -\frac{24}{7}\right)$ (1)

$$f(x) = -\frac{1}{7}(x - 7)^2 + \frac{25}{7} \Rightarrow S\left(7 \mid \frac{25}{7}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{7}(x - 2)(x - 12) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(12|0) \quad (2)$$

i) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow S_y(0|2)$ (1)

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \Rightarrow S\left(\frac{5}{6} \mid -\frac{1}{12}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 3\left(x - 1\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow S_{x1}\left(1|0\right) \text{ und } S_{x2}\left(\frac{2}{3}|0\right) \quad (2)$$

j) $f(x) = 3x^2 - 15x + 18 \Rightarrow S_y(0|18)$ (1)

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{3}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 3(x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

- k) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \Rightarrow S_y(0|3)$ (1)
- $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{1}{8}\right)$ (2)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3) \Rightarrow S_{x_1}(2|0) \text{ und } S_{x_2}(3|0)$ (2)
- l) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} \Rightarrow S_y(0|\frac{5}{2})$ (1)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2 \Rightarrow S(3|-2)$ (2)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-5) \Rightarrow S_{x_1}(1|0) \text{ und } S_{x_2}(5|0)$ (2)
- m) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow S_y(0|-\frac{3}{2})$ (1)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 \Rightarrow S(1|-2)$ (2)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) \Rightarrow S_{x_1}(-1|0) \text{ und } S_{x_2}(3|0)$ (2)
- n) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 6 \Rightarrow S_y(0|-6)$ (1)
- $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 5 \Rightarrow S(2|-5)$ (2)
- $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 24) \Rightarrow S_{x_1}(2 + 2\sqrt{7} | 0) \text{ und } S_{x_2}(2 - 2\sqrt{7} | 0)$ (2)
- o) $f(x) = -3x^2 + 12x + 12 \Rightarrow S_y(0|12)$ (1)
- $f(x) = -3(x-2)^2 + 24 \Rightarrow S(2|24)$ (2)
- $f(x) = -3(x^2 - 4x - 4) \Rightarrow S_{x_1}(2 + \sqrt{8} | 0) \text{ und } S_{x_2}(2 - \sqrt{8} | 0)$ (2)
- p) $f(x) = 2x^2 + 4x + 0 \Rightarrow S_y(0|0)$ (1)
- $f(x) = 2(x+1)^2 - 2 \Rightarrow S(-1|-2)$ (2)
- $f(x) = 2x(x+2) \Rightarrow S_{x_1}(0|0) \text{ und } S_{x_2}(-2|0)$ (2)
- q) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \Rightarrow S_y(0|-1)$ (1)
- $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 \Rightarrow S(2|0)$ (Scheitelpunkt ist gleichzeitig doppelte Nullstelle) (2)
- r) $f(x) = -3x^2 - 12x - 17 \Rightarrow S_y(0|-17)$ (1)
- $f(x) = -3(x+2)^2 - 5 \Rightarrow S(-2|-5)$ (2)
- $f(x) = -3\left(x^2 + 4x + \frac{17}{3}\right) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$ (1)
- s) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 4 \Rightarrow S_y(0|-4)$ (1)
- $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 - 3 \Rightarrow S(-2|-3)$ (2)
- $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 16) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$ (2)
- t) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 5 \Rightarrow S_y(0|-5)$ (1)
- $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 - 2 \Rightarrow S(3|-2)$ (2)
- $f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 15) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$ (1)

$$u) f(x) = 4x^2 - 2x + 2 \Rightarrow S_y(0|2) \quad (1)$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{4} \mid \frac{7}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{keine Nullstellen} \quad (2)$$

$$v) f_t(x) = x^2 - 2tx + 2t - 1 \Rightarrow S_{yt}(0|2t - 1) \quad (1)$$

$$f_t(x) = (x - t)^2 - t^2 + 2t - 1 \Rightarrow S(t|-(t - 1)^2) \quad (2)$$

$$f_t(x) = (x - 1)(x - 2t + 1) \Rightarrow S_{x1t}(1|0) \text{ und } S_{x2t}(2t - 1|0) \quad (2)$$

Aufgabe 2a: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor $\frac{1}{2} > 0$ (0,5)

- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors $\frac{1}{2} < 1$ (0,5)

- Scheitelpunktform $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2 \Rightarrow S(3|-1)$ (3)

- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse: $S_{x1/2}(3 \pm 2|0)$ und $S_y(0|\frac{5}{2})$ (4)

- Graph (3)

Aufgabe 2b: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor $\frac{1}{2} > 0$ (0,5)

- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors $\frac{1}{2} < 1$ (0,5)

- Scheitelpunktform $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2 \Rightarrow S(1|-2)$ (3)

- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse: $S_{x1/2}(1 \pm 2|0)$ und $S_y(0|-\frac{3}{2})$ (4)

- Graph (3)

Aufgabe 2c: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor $\frac{1}{3} > 0$ (0,5)
- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors $\frac{1}{3} < 1$ (0,5)
- Scheitelpunktform $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 3 \Rightarrow S(3|-3)$ (3)
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse: $S_{x1/2}(3 \pm 3|0)$ (4)
- Graph (3)

Aufgabe 2d: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{7}{3}$ auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor $\frac{1}{3} > 0$ (0,5)
- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors $\frac{1}{3} < 1$ (0,5)
- Scheitelpunktform $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{16}{3} \Rightarrow S(3|-\frac{16}{3})$ (3)
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse: $S_{x1/2}(3 \pm 4|0)$ (4)
- Graph (3)

Aufgabe 3a (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von $f(x) = x^2 - 3x - 10$ als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

Lösungen:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow S_y(0|-10) \quad (1)$$

$$f(x) = (x-5)(x+3) \Rightarrow S_{x1}(-2|0) \text{ und } S_{x2}(5|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 10 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{49}{4}\right) \quad (5)$$

Aufgabe 3b (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von $f(x) = x^2 - x - 12$ als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

Lösungen:

$$f(x) = x^2 - x - 12 \Rightarrow S_y(0|-12) \quad (1)$$

$$f(x) = (x-4)(x+3) \Rightarrow S_{x1}(-3|0) \text{ und } S_{x2}(4|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - x - 10 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{49}{4}\right) \quad (5)$$

Aufgabe 3c (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von $f(x) = x^2 - 5x + 4$ als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

Lösungen

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow S_y(0|4) \quad (1)$$

$$f(x) = (x-1)(x-4) \Rightarrow S_{x1}(1|0) \text{ und } S_{x2}(4|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{9}{4}\right) \quad (5)$$

Aufgabe 3d (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von $f(x) = x^2 - 5x + 6$ als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

Lösungen

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow S_y(0|6) \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 10 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{1}{4}\right) \quad (5)$$