

## 4.2. Prüfungsaufgaben zu Achsenschnittpunkten und Scheitelpunkten

### Aufgabe 1: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte

Bestimme bei den folgenden Funktionen den Scheitelpunkt und alle Achsenschnittpunkte.

a)  $f(x) = x^2 - 10x + 21 \Rightarrow S_y(0|21)$  (1)

$$f(x) = (x - 5)^2 - 4 \Rightarrow S(5|-4) \quad (2)$$

$$f(x) = (x - 3)(x - 7) \Rightarrow S_{x1}(3|0) \text{ und } S_{x2}(7|0) \quad (3)$$

b)  $f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow S_y(0|6)$  (1)

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{1}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = (x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

c)  $f(x) = x^2 + 3x - 10 \Rightarrow S_y(0|-10)$  (1)

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{49}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = (x - 2)(x + 5) \Rightarrow S_{x1}(-5|0) \text{ und } S_{x1}(2|0). \quad (2)$$

d)  $f(x) = -2x^2 + 4x + 6 \Rightarrow S_y(0|6)$  (1)

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8 \Rightarrow S(1|8) \quad (2)$$

$$f(x) = -2(x - 3)(x + 1) \Rightarrow S_{x1}(-1|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

e)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow S_y(0|1)$  (1)

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x - 1)^2 + \frac{4}{3} \Rightarrow S\left(1 \mid \frac{4}{3}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)(x + 1) \Rightarrow S_{x1}(-1|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

f)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{8}{3} \Rightarrow S_y\left(0 \mid \frac{8}{3}\right)$  (1)

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow S\left(-3 \mid -\frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(x + 4) \Rightarrow S_{x1}(-2|0) \text{ und } S_{x2}(-4|0) \quad (2)$$

g)  $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x - \frac{51}{5} \Rightarrow S_y\left(0 \mid -\frac{51}{5}\right)$  (1)

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 10)^2 - \frac{49}{5} \Rightarrow S\left(10 \mid -\frac{49}{5}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 3)(x - 17) \Rightarrow S_{x1}(3|0) \text{ und } S_{x2}(17|0) \quad (2)$$

h)  $f(x) = -\frac{1}{7}x^2 + 2x - \frac{24}{7} \Rightarrow S_y\left(0 \mid -\frac{24}{7}\right)$  (1)

$$f(x) = -\frac{1}{7}(x - 7)^2 + \frac{25}{7} \Rightarrow S\left(7 \mid \frac{25}{7}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{7}(x - 2)(x - 12) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(12|0) \quad (2)$$

i)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow S_y(0|2)$  (1)

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \Rightarrow S\left(\frac{5}{6} \mid -\frac{1}{12}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 3\left(x - 1\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow S_{x1}\left(1|0\right) \text{ und } S_{x2}\left(\frac{2}{3}|0\right) \quad (2)$$

j)  $f(x) = 3x^2 - 15x + 18 \Rightarrow S_y(0|18)$  (1)

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{3}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 3(x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (2)$$

- k)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \Rightarrow S_y(0|3)$  (1)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{8} \Rightarrow S(\frac{5}{2} | -\frac{1}{8})$  (2)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x_1}(2|0) \text{ und } S_{x_2}(3|0)$  (2)
- l)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} \Rightarrow S_y(0|\frac{5}{2})$  (1)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2 \Rightarrow S(3|-2)$  (2)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5) \Rightarrow S_{x_1}(1|0) \text{ und } S_{x_2}(5|0)$  (2)
- m)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow S_y(0|-\frac{3}{2})$  (1)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2 \Rightarrow S(1|-2)$  (2)
- $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) \Rightarrow S_{x_1}(-1|0) \text{ und } S_{x_2}(3|0)$  (2)
- n)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 6 \Rightarrow S_y(0|-6)$  (1)
- $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 5 \Rightarrow S(2|-5)$  (2)
- $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 4x - 24) \Rightarrow S_{x_1}(2 + 2\sqrt{7} | 0) \text{ und } S_{x_2}(2 - 2\sqrt{7} | 0)$  (2)
- o)  $f(x) = -3x^2 + 12x + 12 \Rightarrow S_y(0|12)$  (1)
- $f(x) = -3(x - 2)^2 + 24 \Rightarrow S(2|24)$  (2)
- $f(x) = -3(x^2 - 4x - 4) \Rightarrow S_{x_1}(2 + \sqrt{8} | 0) \text{ und } S_{x_2}(2 - \sqrt{8} | 0)$  (2)
- p)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 0 \Rightarrow S_y(0|0)$  (1)
- $f(x) = 2(x + 1)^2 - 2 \Rightarrow S(-1|-2)$  (2)
- $f(x) = 2x(x + 2) \Rightarrow S_{x_1}(0|0) \text{ und } S_{x_2}(-2|0)$  (2)
- q)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \Rightarrow S_y(0|-1)$  (1)
- $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 \Rightarrow S(2|0)$  (Scheitelpunkt ist gleichzeitig doppelte Nullstelle) (2)
- r)  $f(x) = -3x^2 - 12x - 17 \Rightarrow S_y(0|-17)$  (1)
- $f(x) = -3(x + 2)^2 - 5 \Rightarrow S(-2|-5)$  (2)
- $f(x) = -3(x^2 + 4x + \frac{17}{3}) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$  (1)
- s)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 4 \Rightarrow S_y(0|-4)$  (1)
- $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 - 3 \Rightarrow S(-2|-3)$  (2)
- $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 16) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$  (2)
- t)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 5 \Rightarrow S_y(0|-5)$  (1)
- $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 2 \Rightarrow S(3|-2)$  (2)
- $f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 15) \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$  (1)

$$u) f(x) = 4x^2 - 2x + 2 \Rightarrow S_y(0|2) \quad (1)$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{4} \mid \frac{7}{4}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{keine Nullstellen} \quad (2)$$

$$v) f_t(x) = x^2 - 2tx + 2t - 1 \Rightarrow S_{yt}(0|2t - 1) \quad (1)$$

$$f_t(x) = (x - t)^2 - t^2 + 2t - 1 \Rightarrow S(t|-(t - 1)^2) \quad (2)$$

$$f_t(x) = (x - 1)(x - 2t + 1) \Rightarrow S_{x1t}(1|0) \text{ und } S_{x2t}(2t - 1|0) \quad (2)$$

### Aufgabe 2a: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$  auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

#### Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor  $\frac{1}{2} > 0$  (0,5)

- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors  $\frac{1}{2} < 1$  (0,5)

- Scheitelpunktform  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2 \Rightarrow S(3|-1)$  (3)

- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse:  $S_{x1/2}(3 \pm 2|0)$  und  $S_y(0|\frac{5}{2})$  (4)

- Graph (3)

### Aufgabe 2b: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$  auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

#### Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor  $\frac{1}{2} > 0$  (0,5)

- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors  $\frac{1}{2} < 1$  (0,5)

- Scheitelpunktform  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2 \Rightarrow S(1|-2)$  (3)

- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse:  $S_{x1/2}(1 \pm 2|0)$  und  $S_y(0|-\frac{3}{2})$  (4)

- Graph (3)

### Aufgabe 2c: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$  auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

### Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor  $\frac{1}{3} > 0$  (0,5)
- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors  $\frac{1}{3} < 1$  (0,5)
- Scheitelpunktform  $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 3 \Rightarrow S(3|-3)$  (3)
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse:  $S_{x1/2}(3 \pm 3|0)$  (4)
- Graph (3)

### Aufgabe 2d: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte (11)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{7}{3}$  auf

- Öffnung
- Streckung
- Scheitelpunkt
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse
- und zeichne ihren Graphen in einem geeigneten Bereich

### Lösung

- Öffnung nach oben, da Streckfaktor  $\frac{1}{3} > 0$  (0,5)
- Streckung: in y-Richtung gestaucht, da Betrag des Streckfaktors  $\frac{1}{3} < 1$  (0,5)
- Scheitelpunktform  $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{16}{3} \Rightarrow S(3|-\frac{16}{3})$  (3)
- Gemeinsame Punkte mit der x- und y-Achse:  $S_{x1/2}(3 \pm 4|0)$  (4)
- Graph (3)

### Aufgabe 3a (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von  $f(x) = x^2 - 3x - 10$  als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

#### Lösungen:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow S_y(0|-10) \quad (1)$$

$$f(x) = (x-5)(x+3) \Rightarrow S_{x1}(-2|0) \text{ und } S_{x2}(5|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 10 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{49}{4}\right) \quad (5)$$

### Aufgabe 3b (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von  $f(x) = x^2 - x - 12$  als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

#### Lösungen:

$$f(x) = x^2 - x - 12 \Rightarrow S_y(0|-12) \quad (1)$$

$$f(x) = (x-4)(x+3) \Rightarrow S_{x1}(-3|0) \text{ und } S_{x2}(4|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - x - 10 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{49}{4}\right) \quad (5)$$

### Aufgabe 3c (10)

Formuliere die Funktionsgleichung von  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

#### Lösungen

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow S_y(0|4) \quad (1)$$

$$f(x) = (x-1)(x-4) \Rightarrow S_{x1}(1|0) \text{ und } S_{x2}(4|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{9}{4}\right) \quad (5)$$

**Aufgabe 3d (10)**

Formuliere die Funktionsgleichung von  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  als Produkt und bestimme ihre Achsenschnittpunkte sowie ihren Scheitelpunkt.

**Lösungen**

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow S_y(0|6) \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_{x1}(2|0) \text{ und } S_{x2}(3|0) \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 10 = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{1}{4}\right) \quad (5)$$