4.2. Anwendungsaufgaben zu quadratischen Gleichungen

Aufgabe 1 (4)
Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes unterscheiden sich um 3 cm. Wie lang sind die Katheten, wenn das Hypotenusenquadrat 117 cm^2 beträgt?

Lösung
Zeichnung mit Beschriftung (1)
Gleichung $x^2 + (x + 3)^2 = 117$ (1)
$x^2 + 3x - 54 = 0$ (1)
$x_1 = 6 \quad x_2 = -9$ (1)
Die Katheten sind 6 cm und 9 cm lang. (1)

Aufgabe 2 (5)
Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes unterscheiden sich um 1 cm. Wie lang sind die Katheten, wenn die Hypotenuse 5 cm lang ist?

Lösung
Zeichnung mit Beschriftung (1)
Gleichung $x^2 + (x + 1)^2 = 25$ (1)
$2x^2 + 2x - 24 = 0$ (1)
$x_1 = 3 \quad x_2 = -4$ (1)
Die Katheten sind 3 cm und 4 cm lang. (1)

Aufgabe 3 (5)
Die Länge eines Rechteckes ist um 3 cm größer als die Breite und 3 cm kleiner als die Diagonale. Berechnen Sie die Länge, die Breite und die Diagonale des Rechteckes!

Lösung
Länge = x, Breite = x – 3, Diagonale = x + 3
$x^2 + (x - 3)^2 = (x + 3)^2$ (1)
$2x^2 - 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$ (1)
$x^2 - 12x = 0$ (1)
$x_1 = 12 \quad x_2 = 0$ (1)
Länge x = 12 cm, Breite x − 3 = 9 cm, Diagonale x + 3 = 15 cm (1)

Aufgabe 4
Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die eine Kathete 3 cm kürzer als die Hypotenuse und 3 cm länger als die andere Kathete ist. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?

Lange Kathete = x, kurze Kathete = x – 3, Hypotenuse = x + 3
$x^2 + (x - 3)^2 = (x + 3)^2$ (1)
$2x^2 - 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$ (1)
$x^2 - 12x = 0$ (1)
$x_1 = 12 \quad x_2 = 0$ (1)
Lange Kathete x = 12 cm, kurze Kathete x − 3 = 9 cm, Hypotenuse x + 3 = 15 cm (1)

Aufgabe 5 (3)
Welche Fläche hat ein Quadrat, wenn seine Diagonale 7 cm lang ist?

Lösung
Seitenlänge x $\Rightarrow$ Diagonale $(7\text{ cm})^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow$ Flächeninhalt $A = x^2 = \frac{1}{2}(7\text{ cm})^2 = 24{,}5\text{ cm}^2$. (3)

Aufgabe 6 (3)
Wie hoch ist eine quadratische Pyramide, wenn die Seitenkanten 5 cm und die Grundkanten 3 cm lang sind?

Lösung
$h^2 = 5^2 - 2\cdot 3^2 \Rightarrow h = \sqrt{7}\text{ cm} \approx 2{,}64\text{ cm}$. (3)

Aufgabe 7 (5)
Ein Rechteck hat die Fläche A = 2000 cm^2 und den Umfang U = 1,80 m. Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks.

Lösung
Für die Seitenlängen a und b gelten die beiden Gleichungen 1,8 m = U = 2a + 2b und 2000 cm^2 = A = a·b $\Leftrightarrow$ b = $\frac{2000}{a}$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man für a in cm die Gleichung 1800 = 2a + $\frac{4000}{a}$ $\Leftrightarrow$ $2a^2 - 1800a + 4000 = \tilde{0} \Leftrightarrow a^2 - 900a + 2000 = 0 \Leftrightarrow (a - 40)(a + 50) = 0 \Rightarrow a = 40\ cm^2$ und $b = 50\ cm^2$. (5)

Aufgabe 8 (8)
Ein Lebensmittelhändler kaufte Ware für 4375,00 € ein. Diese Ware verkaufte er mit einem Aufschlag auf den Einkaufspreis in Höhe von x Prozent. Für den Betrag, den er dadurch erlöste, kaufte er neue Ware ein, die er wiederum mit einem Aufschlag von x Prozent verkaufte. Er nahm dabei 6511,75 € ein. Wie hoch war der Prozentsatz, den er jedesmal aufgeschlagen hat?

Lösung

$4375 \cdot (1 + 0{,}01x)^2 = 6511{,}75$	| binomische Formel	(1)
$4375\ (1 + 0{,}02x + 0{,}0001x^2) = 6511{,}75$	| Klammer auflösen; − 6511,75	(1)
$0{,}4375x^2 + 87{,}5x - 2136{,}75 = 0$	| : 0,4375	(1)
$x^2 + 200x - 4884 = 0$	| p-q-Formel	(1)
$x_1 = 22 \quad x_2 = -222$		(1)
Der Zinssatz betrug x = 22%.		(1)

Aufgabe 9 (6)
Ein Lebensmittelhändler kaufte Ware für 4300,00 € ein. Diese Ware verkaufte er mit einem Aufschlag auf den Einkaufspreis in Höhe von x Prozent. Für den Betrag, den er dadurch erlöste, kaufte er neue Ware ein, die er wiederum mit einem Aufschlag von x Prozent verkaufte. Er nahm dabei 6718,75 € ein. Wie hoch war der Prozentsatz, den er jedes Mal aufgeschlagen hat?

Lösung

$4300 \cdot (1 + 0{,}01x)^2 = 6718{,}75$	| binomische Formel	(1)
$4300\ (1 + 0{,}02x + 0{,}0001x^2) = 6718{,}75$	| Klammer auflösen, – 6718,57	(1)
$0{,}43x^2 + 86x - 2418{,}75 = 0$	| : 0,43	(1)
$x^2 + 200x - 5625 = 0$	| p-q-Formel	(1)
$x_1 = 25$ und $x_2 = -250$ (nicht sinnvoll)		(1)
$\Rightarrow$ Der Zinssatz betrug x = 25%.		(1)

Aufgabe 10 (6)
Ein Gebrauchtwagen wurde von einer Firma für 9600 € gekauft. Nachdem er zwei Jahre hintereinander mit dem gleichen Prozentsatz x abgeschrieben wurde, beträgt sein Buchwert noch 5400 €. Berechnen Sie den Prozentsatz, mit dem der Wagen abgeschrieben wurde.

Lösung

$9600 \cdot (1 - 0{,}01x)^2 = 5400$	| binomische Formel	(1)
$9600\ (1 - 0{,}02x + 0{,}0001x^2) = 5400$	| Klammer auflösen; – 5400	(1)
$0{,}96x^2 - 192x + 4200 = 0$	| : 0,96	(1)
$x^2 - 200x + 4375 = 0$	| p-q-Formel	(1)
$x_1 = 25$ und $x_2 = 175$		(1)
Der Zinssatz betrug x = 25%.		(1)

Aufgabe 11 (5)
Die Flugbahn eines Balles wird durch $-0{,}025x^2 + 0{,}65x + 1{,}4$ in Metern über dem Erdboden beschrieben. Der Werfer steht auf der Position x = 0. In welcher Höhe wurde der Ball abgeworfen? Wie hoch und wie weit wurde der Ball geworfen? Gib alle Lösungen auf cm genau an.

Aufgabe 12 (5)
Die Flugbahn eines Balles wird durch $y = -0{,}062x^2 + 1{,}85x + 1{,}3$ in Metern über dem Erdboden beschrieben. Der Werfer steht auf der Position $x = 0$. In welcher Höhe wurde der Ball abgeworfen? Wie hoch und wie weit wurde der Ball geworfen? Gib alle Lösungen auf cm genau an.

Lösung (5)
$y = -0{,}03x^2 + 0{,}84x + 1{,}8 = -0{,}03(x^2 - 28x - 60) = -0{,}03(x + 14)^2 + 7{,}65 = -0{,}03(x + 2)(x - 30)$. Der Ball wurde in 1,8 m Höhe abgeworfen und flog 30 m weit und 7,65 m hoch.

Aufgabe 13 (5)
Der Laderaum eines LKWs soll mindestens 4 m lang und 2,5 m hoch sein. Das Volumen soll maximal 25 m^2 betragen. Wie breit darf der Laderaum dann höchstens sein und wie lang ist in diesem Fall die Raumdiagonale?

Lösung (5)
Für die Breite b in m gilt $25\ m^3 \geq V = 2{,}5\ m \cdot 4 \cdot b\ m = 10 \cdot \Leftrightarrow 2{,}5\ m \geq b$. Im breitesten Fall ist die Raumdiagonale $d = \sqrt{2{,}5^2 + 4^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{28{,}5} \approx 5{,}34$ m lang.

Aufgabe 14 (5)
Für ein Haus mit rechteckigem Grundriss steht eine Grundfläche von 108 m^2 zur Verfügung. Wie lang müssen die Seiten sein, wenn ihre Längen sich wie 3:4 verhalten sollen?

Für ie Seiten a und b in m gelten die Gleichungen $108 = a \cdot b$ und $\frac{3}{4} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}a$. Durch Einsetzen erhält man $108 = \frac{4}{3}a^2 \Leftrightarrow 81 = a^2 \Rightarrow a = 9$ m.

Aufgabe 15 (5)
Anna ist mit dem Auto nach Stuttgart gefahren und hat dabei 180 km zurückgelegt und insgesamt 35 € für Benzin ausgegeben. Bruno ist bis Tübingen (135 km) mitgefahren und soll nun an den Benzinkosten beteiligt werden. Wie viel muss er zahlen, wenn die 35 € im Verhältnis 180 : 135 aufgeteilt werden?

Lösung (5)
Für die beiden Anteile a von Anna und b von Bruno in € gelten die Gleichungen $a + b = 35$ und $\frac{180}{135} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = \frac{180}{135}b = \frac{12}{7}b$. Durch Einsetzen erhält man $\frac{12}{7}b + b = 35 \Leftrightarrow \frac{19}{7}b = 35 \Leftrightarrow b = \frac{245}{19} \approx 12{,}89$ € und $a = 35$ € $-$ 12,89 € = 27,11 €.