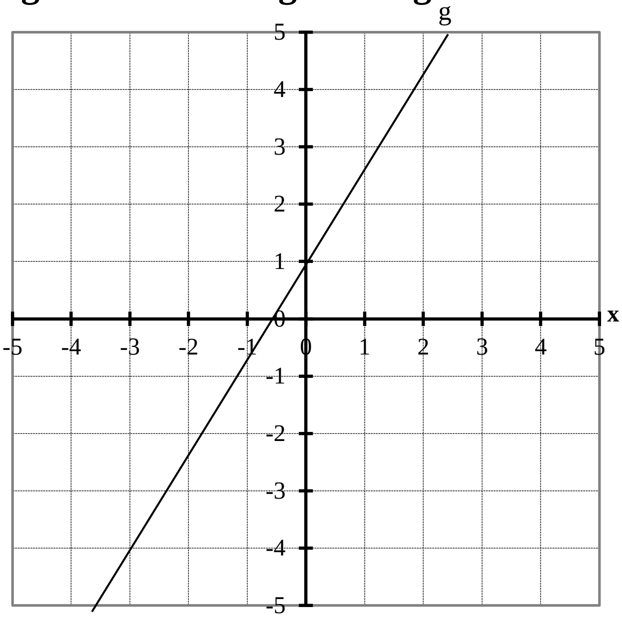
4.2. Prüfungsaufgaben zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

Aufgabe 0a: Lineare und quadratische Funktionen (10)

a) Bestimme die Funktionsgleichung der rechts abgebildeten Geraden g mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks**. (2,5)

b) Zeichne die Gerade $f(x) = -\frac{3}{5}x - 2$ mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks** ebenfalls in das nebenstehende Koordinatensystem. (2,5)

c) Zeichne die beiden Parabeln $p(x) = x^2 - 4$ und $q(x) = -x^2 + 5$ mit Hilfe einer **Wertetabelle** ebenfalls in das nebenstehende Koordinatensystem ein. (5)



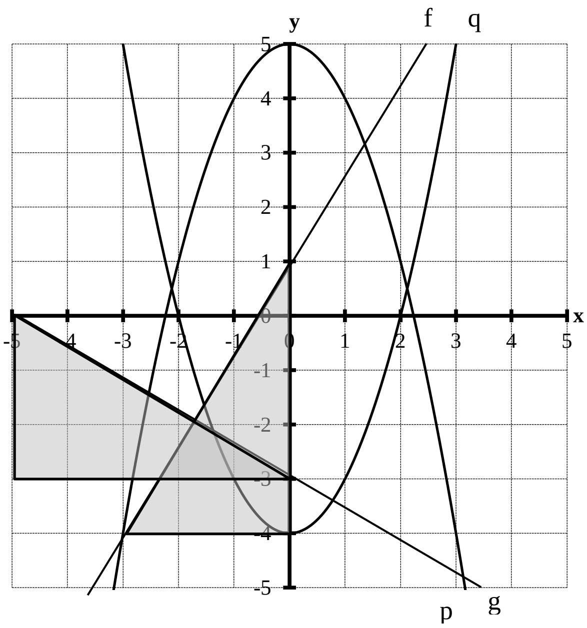
Aufgabe 0a (5)

a) Steigungsdreieck ⇒ $f(x) = \frac{5}{3}x + 1$. (2,5)

b) Zeichnung mit Steigungsdreieck. (2,5)

c) Zeichnungen mit Wertetabelle (5)

x	$p(x) = x^2 - 4$	$q(x) = -x^2 + 5$
−3	5	−4
−2	0	1
−1	−3	−4
0	−4	5
1	−3	4
2	0	1
3	5	−4

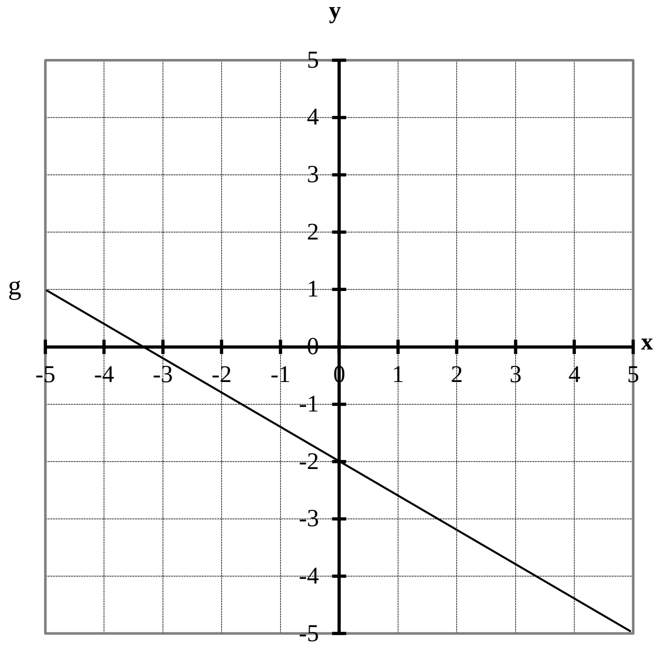


Aufgabe 0b: Lineare und quadratische Funktionen (10)

a) Bestimme die Funktionsgleichung der rechts abgebildeten Geraden g mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks**. (2,5)

b) Zeichne die Gerade $f(x) = \frac{5}{3}x + 1$ mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks** ebenfalls in das nebenstehende Koordinatensystem. (2,5)

c) Zeichne die beiden Parabeln $p(x) = -x^2 + 4$ und $q(x) = x^2 - 5$ mit Hilfe einer **Wertetabelle** ebenfalls in das nebenstehende Koordinatensystem ein.



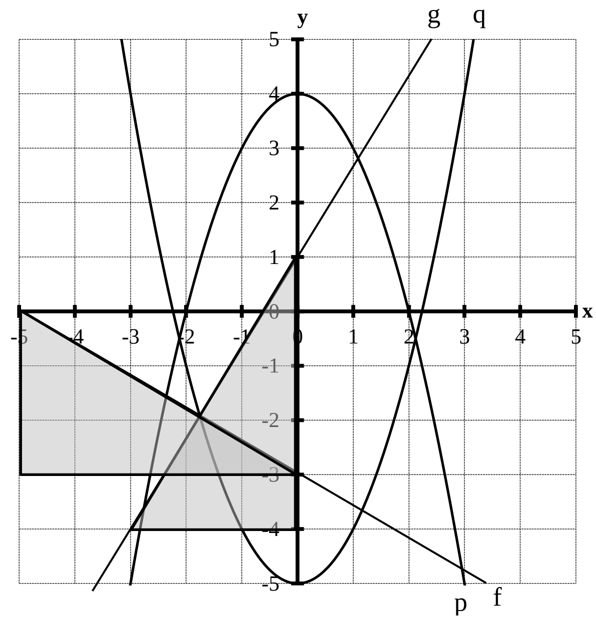
Aufgabe 0b (5)

a) Steigungsdreieck ⇒ $f(x) = -\frac{3}{5}x - 2$. (2,5)

b) Zeichnung mit Steigungsdreieck. (2,5)

c) Zeichnungen mit Wertetabelle (5)

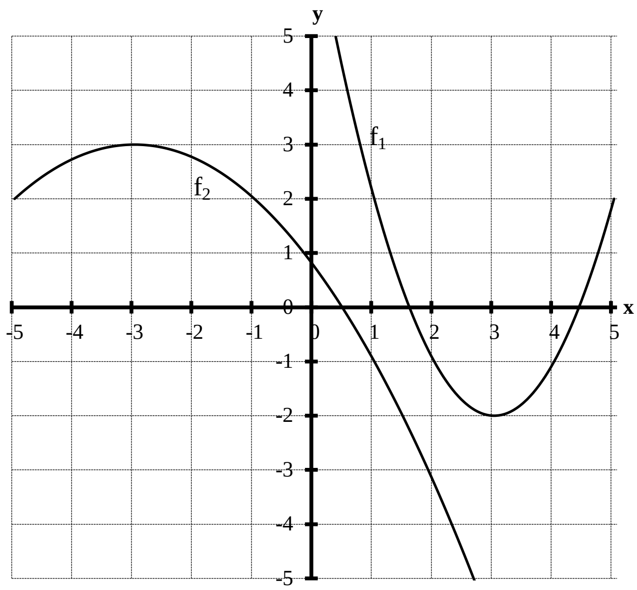
x	$p(x) = x^2 - 5$	$q(x) = -x^2 + 4$
−3	4	−5
−2	−1	0
−1	−4	3
0	−5	4
1	−4	3
2	−1	0
3	4	−5



Aufgabe 1a: Scheitelpunktform (22)

a) Bestimme die Gleichung sowie Definitions- und Wertebereich der rechts abgebildeten Parabeln f_1 und f_2. (10)

b) Bestimme jeweils den Scheitelpunkt sowie die Achsenschnittpunkte der Parabeln
$g_1(x) = -(x-2)^2 + 4$ und
$g_2(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$.
Zeichne ihre Graphen ebenfalls in das rechts abgebildete Koordinatensystem (12)



Lösungen:

a) $f_1(x) = (x-3)^2 - 2$ und $f_2(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 3$ (6)

$D_{f1} = D_{f2} = \mathbb{R}$; $W_{f1} = [-2; \infty[$ und $W_{f2} =]-\infty; 3]$ (4)

b) $g_1(x) = -(x-2)^2 + 4 \quad \Rightarrow S(2|4)$ (1)

$g_1(0) = 0 \quad \Rightarrow S_y(0|0)$ (1)

$0 = -(x-2)^2 + 4 \quad | -4$

$-4 = -(x-2)^2 \quad |\cdot(-1)$

$4 = (x-2)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 2 = x - 2 \quad | +2$

$2 \pm 2 = x \quad \Rightarrow S_{x1}(0|0)$ und $S_{x2}(4|0)$ (2)

Graph: siehe rechts (2)

$g_2(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2 \quad \Rightarrow S(-3|-2)$ (1)

$g_2(0) = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow S_y(0|\frac{5}{2})$ (1)

$0 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2 \quad | +2$

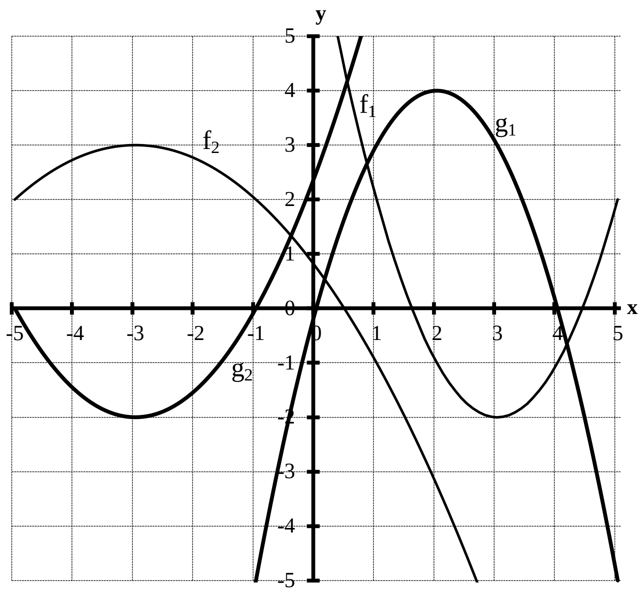
$2 = \frac{1}{2}(x+3)^2 \quad |\cdot 2$

$4 = (x+3)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 2 = x + 3 \quad | -3$

$-3 \pm 2 = x \quad \Rightarrow S_{x1}(-5|0)$ und $S_{x2}(-1|0)$ (2)

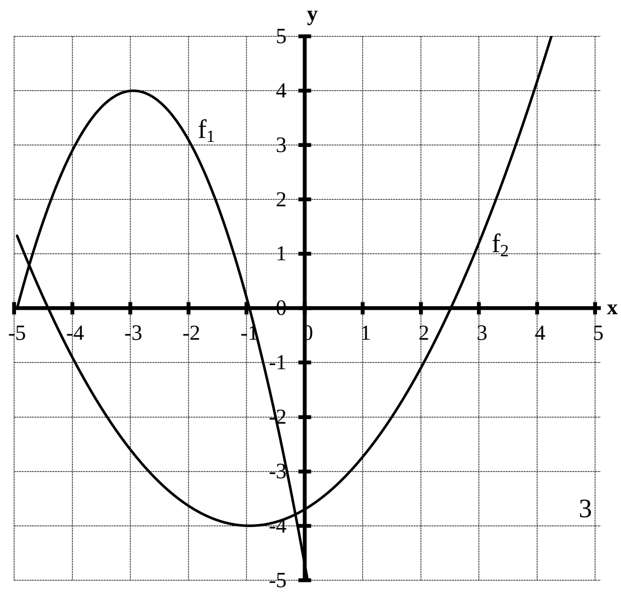
Graph: siehe rechts (2)



Aufgabe 1b: Scheitelpunktform (22)

a) Bestimme die Gleichung sowie Definitions- und Wertebereich der rechts abgebildeten Parabeln f_1 und f_2. (10)

b) Bestimme jeweils den Scheitelpunkt sowie die Achsenschnittpunkte der Parabeln
$g_1(x) = (x+2)^2 - 1$ und
$g_2(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 4$.
Zeichne ihre Graphen ebenfalls in das rechts abgebildete Koordinatensystem. Hinweis: $\sqrt{12} \approx 3{,}5$! (12)



Lösungen:

a) $f_1(x) = -(x + 3)^2 + 4$ und $f_2(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 - 4$ (6)

$D_{f1} = D_{f2} = \mathbb{R}$; $W_{f2} = [-4; \infty[$ und $W_{f1} =]-\infty; 4]$ (4)

b) $f_1(x) = (x + 2)^2 - 1 \quad \Rightarrow S(-2|-1)$ (1)

$f_1(0) = 3 \quad \Rightarrow S_y(0|3)$ (1)

$0 = (x + 2)^2 - 1 \quad | +1$

$1 = (x + 2)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm 1 = x + 2 \quad | -2$

$-2 \pm 1 = x \quad \Rightarrow S_{x1}(-3|0)$ und $S_{x2}(-1|0)$ (2)

Graph: siehe rechts (2)

$f_2(x) = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 4 \Rightarrow S(2|4)$ (1)

$f_2(0) = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow S_y(0|\frac{8}{3})$ (1)

$0 = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 + 4 \quad | -4$

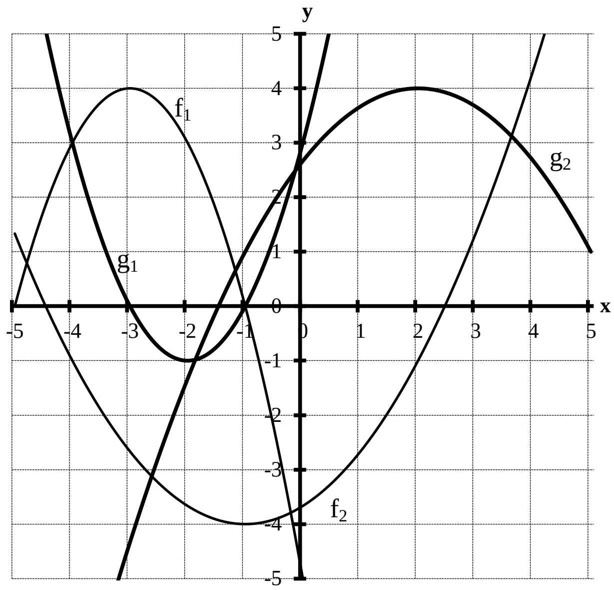
$-4 = -\frac{1}{3}(x - 2)^2 \quad |\cdot(-3)$

$12 = (x - 2)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{12} = x - 2 \quad | +2$

$2 \pm \sqrt{12} = x \quad \Rightarrow S_{x1/2}(2 \pm \sqrt{12}|0)$ (2)

Graph: siehe rechts ($\sqrt{12} \approx 3,5$) (2)



Aufgabe 2: Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt
Vom Schaubild einer Parabel sind der Scheitelpunkt S und ein weiterer Punkt P bekannt. Bestimme die Gleichung der Parabel in Normalform.

a) $S(1|1)$ und $P(2|-1)$ — $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

b) $S(-1|1)$ und $P(-2|3)$ — $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

c) $S(-2|3)$ und $P(-3|0)$ — $f(x) = -3x^2 - 12x - 9$

d) $S(-2|3)$ und $P(1|0)$ — $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

e) $S(-2|3)$ und $P(1|-\frac{3}{2})$ — $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

f) $S(1|-5)$ und $P(-2|-1)$ — $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{41}{9}$

g) $S(-2|-1)$ und $P(-1|1)$ — $f(x) = 2(x + 2)^2 - 1 = 2x^2 + 8x + 7$

Aufgabe 3: Drei Punkte
Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 verläuft.

a) $P_1(-3|0)$, $P_2(-2|1)$ und $P_3(-1|0)$ — $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

b) $P_1(-3|0)$, $P_2(-2|\frac{1}{2})$ und $P_3(-1|0)$ — $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

c) $P_1(-2|3)$, $P_2(-1|1)$ und $P_3(1|9)$ — $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

d) $P_1(-3|1)$, $P_2(-2|2)$ und $P_3(-1|1)$ — $f(x) = -x^2 - 4x - 2$

e) $P_1(-1|0)$, $P_2(1|-24)$ und $P_3(-2|3)$ — $f(x) = -3x^2 - 12x - 9$

f) $P_1(-1|1)$, $P_2(1|1)$ und $P_3(2|-1)$ — $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}$

g) $P_1(-1|1)$, $P_2(1|5)$ und $P_3(2|8)$ — $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{8}{3}$

h) $P_1(-2|-19)$, $P_2(2|-3)$ und $P_3(3|0)$ — $f(x) = -\frac{11}{5}x^2 + 4x - \frac{51}{5}$

i) $P_1(-3|-1)$, $P_2(1|-5)$ und $P_3(5|7)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{2}$

j) $P_1(-4|\frac{7}{2})$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(6|6)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

k) $P_1(2|-3)$, $P_2(-1|0)$ und $P_3(-2|3)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

l) $P_1(1|-3)$, $P_2(2|-9)$ und $P_3(-3|1)$ $\qquad f(x) = -x^2 - 3x + 1$

m) $P_1(-1|3)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(3|-1)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1$

n) $P_1(-2|-1)$, $P_2(1|5)$ und $P_3(4|7)$ $\qquad f(x) = -x^2 + x + 5$

Aufgabe 4: Scheitelpunkt mit Form und Öffnung

Gib die Gleichung einer Normalparabel an, die den Scheitelpunkt $S(2|1)$ hat und nach unten geöffnet ist.

Lösung

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Aufgabe 5: Zwei Punkte mit Form und Öffnung

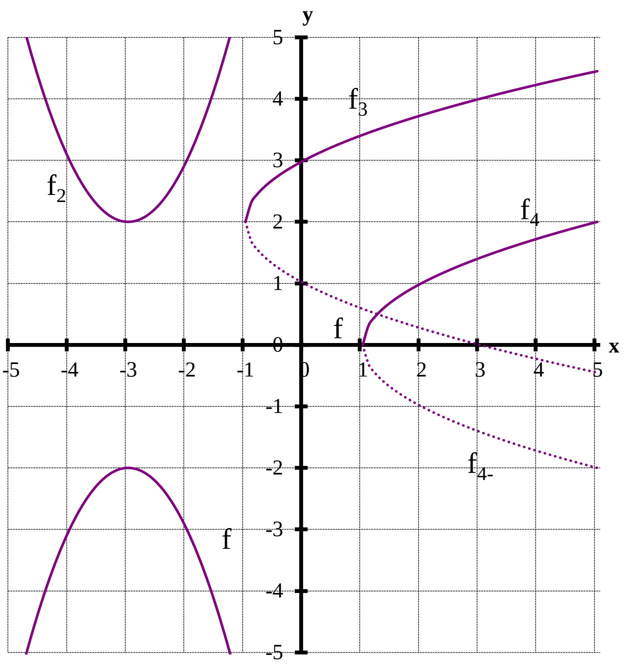
Bestimme die Gleichung der nach unten geöffneten Normalparabel, die durch die Punkte $P_1(3|2)$ und $P_2(1|2)$ verläuft.

Lösung:

$f(x) = -x^2 + 4x - 1$

Problem 6a (14)

a) Determine domain, range, Maximum and y-intercept of $f_1(x) = -x^2 - 6x - 11$ (4)
b) Reflect f_1 in the x-Axis and give the formula of the new Parabola f_2. (2)
c) Rotate f_2 by 90 degrees clockwise with center $(-2|1)$ and give the formula of the new curves $f_{3\pm}$. (2)
d) Translate f_3 with $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ and give the formula of the new curves $f_{4\pm}$. (2)
e) Draw the curves in a common coordinate system (4)



Problem 6a (14)

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 11 = -(x + 3)^2 - 2$
maximum $S(-3|-2)$, y-intercept $S_y(0|-11)$, (2)
domain $\mathbb{R}$ and range $]-\infty; -2]$. (2)
b) graph (1)
c) $y = -f(x) = -x^2 + 6x + 11$ with graph (2)
d) $y - 1 = f(x + 2) \Leftrightarrow y = x^2 + 2$ with graph (2)
e) $y_{1/2} = \pm\sqrt{x-2} + 3$ with graph (3)

Problem 6b (14)

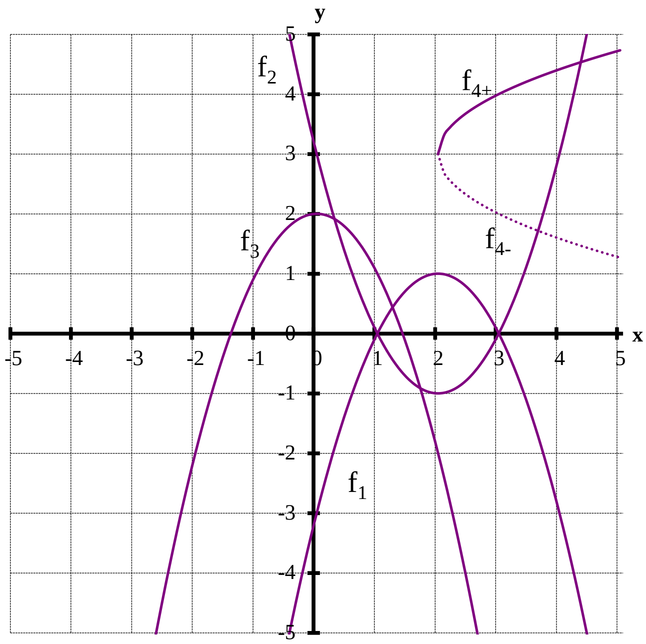
a) Find maximum, y-intercept, zeroes, domain and range of the function $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. (6)

b) Draw the graph of f. (1)

c) Reflect f in the x-axis, draw its graph and give the formula of the new function. (2)

d) Translate f by the vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, draw its graph and give the formula of the new function. (2)

e) Rotate f by 90 degrees counterclockwise around center (1|2), draw its graph and give the formula of the new function. (3)



Problem 6b (14)

f) $f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 3)(x - 1) = -(x - 2)^2 + 1$

maximum S(2|1), y-intercept $S_y(0|-3)$, (2)

zeroes $S_{x1}(1|0)$ and $S_{x2}(3|0)$, (2)

domain $\mathbb{R}$ and range $]-\infty; 1]$. (2)

g) graph (1)

h) $y = -f(x) = x^2 - 4x + 3$ with graph (2)

i) $y - 1 = f(x + 2) \Leftrightarrow y = x^2 + 2$ with graph (2)

j) $y_{1/2} = \pm\sqrt{x-2} + 3$ with graph (3)