4.2. Fragen zur Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Aufgabe 1: Achsenschnittpunkte und gemeinsame Punkte einer Parabel mit einer Geraden
Untersuche die Funktionen f und g auf Achsenschnittpunkte sowie gemeinsame Punkte. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel und zeichne die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f(x) = -x^2 + 2x$ und $g(x) = -2x + 4$
$S_f(1|-1)$, $S_{fx1/2}(1 \pm 1|0)$ (zugleich Schnittpunkt mit y-Achse), $S_{fg}(2|0)$ (Berührpunkt) (8)

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$ und $g(x) = 2x + 2$
$S_f(0|\frac{9}{2})$, $S_{fx1/2}(\pm 3|0)$, $S_{gy}(0|2)$, $S_{gx}(-1|0)$, $S_{fg1}(1|4)$ und $S_{fg2}(-5|-8)$ (9)

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ und $g(x) = x$
$S_f(0|\frac{1}{2})$ $S_{fx1/2}(\pm 1|0)$, $S_{gx}(0|0) = S_{gy}$, $S_{fg1}(1|1)$ und $S_{fg2}(-1|-1)$ (8)

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ und $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$
$S_f(2|-\frac{1}{2})$, $S_{fy}(0|\frac{3}{2})$ und $S_{fx1/2}(2 \pm 1|0)$ sowie $S_{gy}(0|\frac{5}{2})$ und $S_{gx}(\frac{5}{3}|0)$ mit $S_{fg1}(-1|4)$ und $S_{fg2}(2|-\frac{1}{2})$. (9)

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ und $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$
$S_f(-2|-\frac{1}{2})$, $S_{fy}(0|\frac{3}{2})$ und $S_{fx1/2}(-2 \pm 1|0)$ sowie $S_{gy}(0|\frac{5}{2})$ und $S_{gx}(-\frac{5}{3}|0)$ mit $S_{fg1}(1|4)$ und $S_{fg2}(-2|-\frac{1}{2})$. (9)

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$
$S_f(-\frac{5}{2}|-\frac{1}{8})$, $S_{fy}(0|3)$, $S_{fx1}(-3|0)$, $S_{fx2}(-2|0)$ sowie $S_{gy}(0|-1)$, $S_{gx}(-2|0)$ mit $S_{fg1}(-4|1)$ und $S_{fg2}(-2|0)$. (9)

g) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
$S_f(3|\frac{10}{3})$, $S_{fy}(0|\frac{1}{3})$ und $S_{fx1/2}(3 \pm \sqrt{10}|0)$ sowie $S_{gy}(0|\frac{7}{3})$ und $S_{gx}(7|0)$ mit $S_{fg1}(1|2)$ und $S_{fg2}(6|\frac{1}{3})$. (9)

h) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
$S_f(3|\frac{10}{3})$, $S_{fy}(0|\frac{1}{3})$ und $S_{fx1/2}(3 \pm \sqrt{10}|0)$ sowie $S_{gy}(0|\frac{7}{3})$ und $S_{gx}(7|0)$ mit $S_{fg1}(1|2)$ und $S_{fg2}(6|\frac{1}{3})$. (9)

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{1}{3}$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$
$S_f(3|-\frac{10}{3})$, $S_{fy}(0|-\frac{1}{3})$, $S_{fx1/2}(3 \pm \sqrt{10}|0)$ sowie $S_{gy}(0|-\frac{7}{3})$ und $S_{gx}(-7|0)$ mit $S_{fg1}(2|-3)$. $S_{fg2}(3|-\frac{10}{3})$. (9)

j) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$ und $g(x) = -x + \frac{5}{3}$
$S_f(2|-\frac{1}{3})$, $S_{fy}(0|1)$ und $S_{fx1/2}(2 \pm 1|0)$ sowie $S_{gy}(0|\frac{5}{3})$ und $S_{gx}(\frac{5}{3}|0)$ mit $S_{fg1}(-1|\frac{8}{3})$ und $S_{fg2}(2|-\frac{1}{3})$. (9)

k) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$ und $g(x) = x + \frac{5}{3}$
$S_f(-2|-\frac{1}{3})$, $S_{fy}(0|1)$ und $S_{fx1/2}(-2 \pm 1|0)$ sowie $S_{gy}(0|\frac{5}{3})$ und $S_{gx}(-\frac{5}{3}|0)$ mit $S_{fg1}(1|\frac{8}{3})$ und $S_{fg2}(-2|-\frac{1}{3})$. (9)

l) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$
$S_f(1|3)$, $S_{fy}(0|1)$ und $S_{fx1/2}(1 \pm 3|0)$ sowie $S_{gy}(0|2)$ und $S_{gx}(-6|0)$ mit $S_{fg1}(-1|\frac{5}{3})$ und $S_{fg2}(2|\frac{8}{3})$. (9)

Aufgabe 2: Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte und gemeinsame Punkte zweier Parabeln
Untersuche die Funktionen f und g auf Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte sowie gemeinsame Punkte. Zeichne die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4$

$S_f(0|0)$, $S_g(0|4)$, $S_{gx1/2}(\pm 2|0)$, $S_{fg1}(-\sqrt{2}\ |2)$, $S_{fg2}(\sqrt{2}\ |2)$ (8)

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 6$

$f(x) = (x-2)^2 - 2 \Rightarrow S_f(2|-2)$, $S_{fy}(0|2)$ und $S_{fx1/2}(2 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (5)

$g(x) = -(x+3)^2 + 3 \Rightarrow S_g(3|3)$, $S_{gy}(0|-6)$ und $S_{gx1/2}(3 \pm \sqrt{3}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|-1)$ und $S_{fg2}(4|2)$. (5)

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 - 6x + 6$

$f(x) = -(x-2)^2 + 2 \Rightarrow S_f(2|2)$, $S_{fy}(0|-2)$ und $S_{fx1/2}(2 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (5)

$g(x) = (x-3)^2 - 3 \Rightarrow S_g(3|-3)$, $S_{gy}(0|6)$ und $S_{gx1/2}(3 \pm \sqrt{3}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|1)$, $S_{fg2}(4|-2)$. (5)

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und $g(x) = -x^2 - 2x + 1$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) \Rightarrow S_f(1|-2)$, $S_{fy}(0|-\frac{3}{2})$, $S_{fx1}(-1|0)$ und $S_{fx2}(3|0)$ (5)

$g(x) = -(x+1)^2 + 2 \Rightarrow S_g(-1|2)$, $S_{gy}(0|1)$ und $S_{gx1/2}(-1 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \Rightarrow S_{fg1}(1|-2)$ und $S_{fg2}(-\frac{5}{3}|\frac{14}{9})$ (5)

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ und $g(x) = x^2 - 2x - 1$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1) \Rightarrow S_f(-1|2)$, $S_{fy}(0|\frac{3}{2})$, $S_{fx1}(-3|0)$ und $S_{fx2}(1|0)$ (5)

$g(x) = (x-1)^2 - 2 \Rightarrow S_g(1|-2)$, $S_{gy}(0|-1)$ und $S_{gx1/2}(1 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \Rightarrow S_{fg1}(-1|2)$ und $S_{fg2}(\frac{5}{3}|-\frac{14}{9})$ (5)

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$ und $g(x) = x^2 - 2x - 1$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 7) \Rightarrow S_f(1|4)$, $S_{fy}(0|\frac{7}{2})$ und $S_{fx1/2}(1 \pm 2\sqrt{2}\ |0)$ (5)

$g(x) = (x-1)^2 - 2 \Rightarrow S_g(1|-2)$, $S_{gy}(0|-1)$ und $S_{gx1/2}(1 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(x+1)(x-3) \Rightarrow S_{fg1}(-1|2)$ und $S_{fg2}(3|2)$ (5)

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 8$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12) \Rightarrow S_f(3|\frac{3}{2})$, $S_{fy}(0|6)$ und keine Nullstellen (4)

$g(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x-2)(x-8) \Rightarrow S_g(5|-\frac{9}{2})$, $S_{gy}(0|8)$, $S_{gx1}(2|0)$ und $S_{gx2}(8|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x - 2 \Rightarrow S_{fg}(1|\frac{7}{2})$ (3)

h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 7$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 3 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 10) \Rightarrow S_f(2|-3)$, $S_{fy}(0|-5)$ und keine Nullstellen (4)

$g(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 10) \Rightarrow S_g(4|1)$, $S_{gy}(0|-6)$ und $S_{gx1/2}(4 \pm \sqrt{2}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x - 2 \Rightarrow S_{fg}(1|-\frac{7}{2})$ (3)

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{16}{3}$

$f(x) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 + 1 = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 12) \Rightarrow S_f(-3|1)$, $S_{fy}(0|4)$ und keine Nullstellen (4)

$g(x) = \frac{1}{3}(x + 5)^2 - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)(x + 8) \Rightarrow S_g(-5|-3)$, $S_{gy}(0|\frac{16}{3})$, $S_{gx1}(-2|0)$ und $S_{gx2}(-8|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow S_{fg}(-1|\frac{7}{3})$ (3)

j) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{17}{3}$.

$f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)(x + 3) \Rightarrow S_f(0|3) = S_{fy}(0|3)$ und $S_{fx1/2}(\pm 3|0)$ (3)

$g(x) = \frac{1}{3}(x - \frac{5}{2})^2 + 4 = \frac{1}{3}(x^2 + 10x + 17) \Rightarrow S_g(-5|-\frac{8}{3})$, $S_{gy}(0|\frac{17}{3})$ $S_{gx1/2}(-5 \pm 2\sqrt{2}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(x + 1)(x + 4) \Rightarrow S_{fg1}(-4|-\frac{7}{3})$ und $S_{fg2}(-1|\frac{8}{3})$ (5)

k) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ und $g(x) = x^2 - 2x - 3$

$f(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^2 + 2 = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 7) \Rightarrow S_f(1|2)$, $S_{fy}(0|\frac{7}{3})$ und keine Nullstellen (3)

$g(x) = (x - 1)^2 - 4 = (x + 1)(x - 3) \Rightarrow S_g(1|-4)$, $S_{gy}(0|-3)$, $S_{gx1}(-1|0)$ und $S_{gx2}(3|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x - 4)(x + 2) \Leftrightarrow S_{fg1}(4|5)$ und $S_{fg2}(-2|5)$ (5)

l) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$

$f(x) = (x + 1)^2 + 4 \Rightarrow S_f(-1|4)$, $S_{fy}(0|4)$ und keine Nullstellen (3)

$g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 2) \Rightarrow S_g(2|-3)$, $S_y(0|-1)$ und $S_{gx1/2}(2 \pm \sqrt{6}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = \frac{1}{2}(x + 2)(x + 6) \Rightarrow S_{fg1}(-2|5)$ und $S_{fg2}(-6|29)$ (5)

m) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$

$f(x) = (x + 1)^2 + 2 \Rightarrow S_f(-1|2)$, $S_{fy}(0|3)$ und keine Nullstellen (3)

$g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 6) \Rightarrow S_g(2|-5)$, $S_{gy}(0|-3)$ und $S_{gx1/2}(2 \pm \sqrt{10}\ |0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = \frac{1}{2}(x + 2)(x + 6) \Rightarrow S_{fg1}(-2|3)$ und $S_{fg2}(-6|27)$ (5)

n) $f(x) = x^2 - 2x$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

$f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) \Rightarrow S_f(1|-1)$, $S_{fy}(0|0) = S_{fx1}$ und $S_{fx2}(2|0)$ (3)

$g(x) = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{8} = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 3) \Rightarrow S_g(-\frac{1}{2}|\frac{25}{8})$, $S_{gy}(0|3)$, $S_{gx1}(2|0)$ und $S_{gx2}(-3|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 = \frac{3}{2}(x - 2)(x + 1) \Rightarrow S_{fg1}(2|0)$ und $S_{fg2}(-1|3)$ (5)

o) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 13) \Rightarrow S_f(0|-\frac{13}{2}) = S_{fy}$ und $S_{fx1/2}(\pm\sqrt{13}\ |0)$ (3)

$g(x) = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{16} = \frac{1}{4}(x - 3)(x + 2) \Rightarrow S_g(\frac{1}{2}|-\frac{25}{16})$, $S_{gy}(0|-\frac{3}{2})$, $S_{gx1}(-2|0)$ und $S_{gx2}(3|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 5 = \frac{1}{4}(x - 4)(x + 5) \Rightarrow S_{fg1}(4|\frac{3}{2})$ und $S_{fg2}(-5|6)$ (5)

Aufgabe 3: mit ausführlicher Lösung (9)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel p mit Scheitelpunkt S(−2|5), welche die y-Achse an der Stelle y = 3 schneidet. (3)

b) In welchen Punkten schneidet p die Gerade $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$? (3)

c) Skizzieren Sie p und g in ein gemeinsames Koordinatensystem. (3)

Aufgabe 3 (6)

a) $p(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 5$ (3)

b) $p(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 5 = \frac{1}{3}x + 3$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x + \frac{14}{3}) = 0$ (2)

Einsetzen $\Rightarrow S_{pg1}(0|3)$ und $S_{pg2}(-\frac{14}{3}|\frac{13}{9})$ (1)

c) Beschriftete Skizze (3)