4.2. Prüfungsaufgaben zu quadratischen Funktionen mit Parametern

Aufgabe 1: Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte und gemeinsame Punkte

Gegeben seien die Funktionen $f_t(x) = x^2 - 2x - t$ für $t \in \mathbb{R}$. und $g(x) = 2x - 4$

a) Gib die Koordinaten der Achsenschnittpunkte und des Scheitelpunktes von f_t in Abhängigkeit von t an. (6)

b) Untersuche, für welche t sich die Schaubilder von f_t und g
- schneiden,
- berühren oder
- passieren

und gib die Koordinaten der gemeinsamen Punkte in Abhängigkeit von t an. (4)

c) Zeichne die Schaubilder von f_{-1}, f_0 und f_1 sowie von g in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-1 \le x \le 3$ und $-5 \le x \le 4$. (3)

Lösung

a) $S(1|-1-t)$, $S_y(0|-t)$, $S_{x1}(1-\sqrt{1+t}\ )$ und $S_{x2}(1+\sqrt{1+t}\ )$, falls $t \neq -1$

b) $S_{fg1}(2-\sqrt{t}\ |-2\sqrt{t}\ )$ und $S_{fg2}(2+\sqrt{t}\ |2\sqrt{t}\ )$, falls $t > 0$

$S_{fg1}(2|0)$, falls $t = 0$

keine gemeinsamen Punkte, falls $t < 0$

c) Normalparabeln mit Scheitelpunkten bei $S_{-1}(1|-2)$, $S_0(1|-1)$ und $S_1(1|0)$ sowie Gerade.

Aufgabe 2: Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte und gemeinsame Punkte

Gegeben seien die Funktionen $f_t(x) = x^2 + 2x - t$ für $t \in \mathbb{R}$. und $g(x) = -2x - 4$

a) Gib die Koordinaten der Achsenschnittpunkte und des Scheitelpunktes von f_t in Abhängigkeit von t an. (6)

b) Untersuche, für welche t sich die Schaubilder von f_t und g
- schneiden,
- berühren oder
- passieren

und gib die Koordinaten der gemeinsamen Punkte in Abhängigkeit von t an. (4)

c) Zeichne die Schaubilder von f_{-1}, f_0 und f_1 sowie von g in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-3 \le x \le 1$ und $-5 \le x \le 4$. (3)

Lösung

a) $S(-1|-1-t)$, $S_y(0|-t)$, $S_{x1}(-1-\sqrt{1+t}\ |0)$ und $S_{x2}(-1+\sqrt{1+t}\ |0)$, falls $t \neq -1$

b) $S_{fg1}(-2-\sqrt{t}\ |-2\sqrt{t}\ )$ und $S_{fg2}(-2+\sqrt{t}\ |2\sqrt{t}\ )$, falls $t > 0$

$S_{fg}(-2|0)$, falls $t = 0$

keine gemeinsamen Punkte, falls $t < 0$

c) Normalparabeln mit Scheitelpunkten bei $S_{-1}(-1|-2)$, $S_0(-1|-1)$ und $S_1(-1|0)$ sowie Gerade.

Aufgabe 3: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte

Gegeben seien die Funktionen $f_t(x) = x^2 - 2tx - 2t + 1$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $D(t) = t^2 + 2t - 1$.

a) Beschreibe die Streckung bzw. Stauchung, die Koordinaten des Scheitelpunktes sowie die Achsenschnittpunkte der Funktion $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t.

b) Bestimme die Streckung bzw. Stauchung, die Koordinaten des Scheitelpunktes sowie die Achsenschnittpunkte der Funktion D(t)

c) Zeichne ein Schaubild von D(t) im Bereich $-3 \le t \le 1$.

d) Für welche t ist
- $D(t) > 0$
- $D(t) = 0$
- $D(t) < 0$?

e) Für welche t besitzt $f_t(x)$ zwei, eine bzw. keine Nullstellen? (Begründung!)

Lösung:

a) $S(t|-t^2-2t+1)$ und $x_{1/2} = t \pm \sqrt{t^2+2t-1}$

b) $D(t) = t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2$, also $S(-1|2)$

c) (nach oben geöffnete Normalparabel)

d) $t_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$, also

e) $D(t) > 0$ und zwei NST im Schaubild von $f_t(x)$ für $t < -1-\sqrt{2}$ oder $t > -1+\sqrt{2}$.

$D(t) = 0$ und eine NST im Schaubild von $f_t(x)$ für $t = -1-\sqrt{2}$ oder $t = -1+\sqrt{2}$.

$D(t) < 0$ und keine NST im Schaubild von $f_t(x)$ für $-1-\sqrt{2} < t < -1+\sqrt{2}$.

Aufgabe 4: Achsenschnittpunkte und Scheitelpunkte

Gegeben seien die Funktionen $f_t(x) = x^2 - 2tx + 4$ für $t \in \mathbb{R}$. und $D(t) = t^2 - 4$.

a) Berechne den Scheitelpunkt von f_t in Abhängigkeit von t.

b) Berechne alle Achsenschnittpunkte von D.

c) Für welche t ist
- $D(t) < 0$,
- $D(t) = 0$,
- $D(t) > 0$?

d) Berechne alle Achsenschnittpunkte von f_t in Abhängigkeit von t.

Lösung

a) $S(t|t^2-4)$

b) $S_1(-2|0)$ und $S_2(2|0)$

c) $D(t) < 0$ für $-2 < t < 2$
$D(t) = 0$ für $t = \pm 2$
$D(t) > 0$ für $t < -2$ oder $2 < t$.

d) Aus $f_t(x) = 0$ erhält man $x_{1/2} = t \pm \sqrt{t^2-4}$ und daraus

keine Nullstelle für $-2 < t < 2$
eine Nullstelle $S(t|0)$ für $t = \pm 2$
zwei Nullstellen $S(t \pm \sqrt{t^2-4}\,|0)$ für $t < -2$ oder $2 < t$.

Aufgabe 5: gemeinsame Punkte

Bestimme die gemeinsamen Punkte der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von t:

a) $f_t(x) = t(x-1)^2$ und $g(x) = 1$ mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $f(x) = x^2 + 4t - 2t^2$ und $g(x) = -x^2 + 4x$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösung:

a) $S_{t1/2}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{t}}|1)$

b) $S_{t1}(2-t|4-t^2)$ und $S_{t2}(t|4t-t^2)$

Aufgabe 6: Achsenschnittpunkte und gemeinsame Punkte

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ und $g_t(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + t$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechne alle Achsenschnittpunkte von f

b) Berechne alle Achsenschnittpunkte von g_t in Abhängigkeit von t

c) Für welche t haben die Schaubilder von f und g_t
- zwei Schnittpunkte
- einen Berührpunkt
- keinen gemeinsamen Punkt?

Lösung

a) $S_1(0|-\frac{3}{2})$, $S_1(-3|0)$ und $S_2(1|0)$

b) $S_{0t}(0|\frac{9}{2}+t)$, $S_{1t}(3+\sqrt{2t}\,|0)$ und $S_{2t}(3-\sqrt{2t}\,|0)$, falls $t \neq 0$.

c) Aus $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} + t$

bzw. $x^2 - 2x + 3 - t = 0$

erhält man $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{t-2}$

und daraus
- zwei Schnittpunkte für $t > 2$
- einen Berührpunkt für $t = 2$
- keinen gemeinsamen Punkt für $t < 2$

Aufgabe 7: gemeinsame Punkte

Welchen Wert muss t annehmen, damit das Schaubild der Funktion $f_t(x) = tx^2 + (t+1)x$ die Gerade $g(x) = -1$ gerade berührt? Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

Lösung:

$f_t(x) = tx^2 + (t+1)x = t(x + \frac{t+1}{2t})^2 - \frac{(t+1)^2}{4t}$, also $S(-\frac{t+1}{2t}\,|-\frac{(t+1)^2}{4t})$ und aus $-\frac{(t+1)^2}{4t} = -1$ ergibt sich $t - 2t + 1 = 0$ und daraus $t = 1$. Die Koordinaten des Berührpunktes (=Scheitelpunkt) sind dann $S(-1|-1)$.

Aufgabe 8: gemeinsame Punkte

Welchen Wert muss t annehmen, damit das Schaubild der Funktion $f_t(x) = x^2 - tx + 72$ die nach unten geöffnete Normalparabel $p(x) = -x^2$ gerade berührt? Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

Lösung:

Aus $2x^2 - tx + 72 = 0$ erhält man $x_t = \frac{t}{4} \pm \sqrt{\frac{t^2}{16} - 36}$ und daraus $t_a = -24$ und $t_b = 24$. Die Koordinaten des Berührpunktes sind dann $S_a(-6|-36)$ und $S_b(6|-36)$.

Aufgabe 9: Ortskurven

Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Scheitelpunkte von f_t und zeichne die Ortskurve und die Schaubilder von f_t für $t \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + 1$ für $-3 \le x \le 3$ und $-2 \le y \le 4$

$f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + 1 = 2(x - \frac{t}{2})^2 - \frac{t^2}{4} + 1 \Rightarrow S_t(\frac{t}{2}\,|-\frac{t^2}{4} + 1)$ mit Ortskurve $y = -x^2 + 1$.

b) $f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + t - 1$ für $-3 \le x \le 3$ und $-7 \le y \le 2$.

$f_t(x) = 2x^2 - 2tx + \frac{t^2}{4} + t - 1 = 2(x - \frac{t}{2})^2 - \frac{t^2}{4} + t - 1 = 2(x - \frac{t}{2})^2 - (\frac{t}{2} - 1)^2$

$\Rightarrow S_t(\frac{t}{2}\,|-(\frac{t}{2} - 1)^2)$ mit Ortskurve $y = -(x-1)^2$.

c) $f_t(x) = -2x^2 + 2tx - \frac{t^2}{4} + t + 1$ für $-3 \le x \le 3$ und $-2 \le y \le 7$.

$f_t(x) = -2x^2 + 2tx - \frac{t^2}{4} + t + 1 = -2(x - \frac{t}{2})^2 + \frac{t^2}{4} + t + 1 = -2(x - \frac{t}{2})^2 + (\frac{t}{2} + 1)^2$

$\Rightarrow S_t(\frac{t}{2}\,|\,(\frac{t}{2} + 1)^2)$ mit Ortskurve $y = (x+1)^2$.

d) $f_t(x) = \frac{x^2}{t} - \frac{2x}{t} + \frac{2}{t}$ für $-2 \le x \le 5$ und $-5 \le y \le 5$.

$f_t(x) = \frac{x^2}{t} - \frac{2x}{t} + \frac{2}{t} = \frac{1}{t}(x-1)^2 + \frac{1}{t} \Rightarrow S_t(1|\frac{1}{t})$ mit Ortskurve $x = 1$

e) $f_t(x) = -x^2 + 2tx + 2t + 1$ für $-4 \leq x \leq 4$ und $-4 \leq y \leq 4$

$f_t(x) = -x^2 + 2tx + 2t + 1 = -(x - t)^2 + (t + 1)^2 \Rightarrow S(t|(t + 1)^2)$ mit Ortskurve $y = (x + 1)^2$

f) $f_t(x) = \frac{x^2}{t} - 2x + 1$ für $-5 \leq x \leq 5$ und $-4 \leq y \leq 6$

$f_t(x) = \frac{x^2}{t} - 2x + 1 = \frac{1}{t}(x - t)^2 - t + 1 \Rightarrow S(t|-t + 1)$ mit Ortskurve $y = -x + 1$

g) $f_t(x) = x^2 - \frac{2}{t}x + \frac{4}{t} - 4$ für $-5 \leq x \leq 5$ und $-25 \leq y \leq 4$

$f_t(x) = x^2 - \frac{2}{t}x + \frac{4}{t} - 4 = (x - \frac{1}{t})^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t} - 4 = (x - \frac{1}{t})^2 - (\frac{1}{t} - 2)^2 \Rightarrow S_t(\frac{t}{2} | (\frac{t}{2} + 1)^2)$ mit Ortskurve $y = -(x - 2)^2$ mit $S_{-1/3}(-3|-25)$, $S_{-1/2}(-2|-16)$, $S_{-1}(-1|-9)$, $S_1(1|1)$, $S_{1/2}(2|0)$ und $S_{1/3}(3|-1)$.

h) $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 4t - 1$ für $-2 \leq x \leq 6$ und $-2 \leq y \leq 6$

$f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2tx + 4t - 1. = \frac{1}{2}(x - 2t)^2 - 2t^2 + 4t - 1 = \frac{1}{2}(x - 2t)^2 - \frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 1$

$\Rightarrow S_t(2t|-\frac{1}{2}(2t - 2)^2 + 1)$ mit Ortskurve $y = -(x - 2)^2 + 1$ mit $S_0(0|-1)$, $S_{1/2}(1|0{,}5)$, $S_1(2|1)$, $S_{3/2}(3|0{,}5)$ und $S_2(4|-1)$.

i) $f_t(x) = -x^2 + 4tx - 4t^2 + t + 1$ für $-4 \leq x \leq 4$ und $-4 \leq y \leq 2$

$f_t(x) = -x^2 + 4tx - 4t^2 + t + 1 = -(x - 2t)^2 + t + 1 \Rightarrow S_t(2t|t + 1)$ mit Ortskurve $y = 0{,}5x + 1$