

4.2. Prüfungsaufgaben zu quadratischen Gleichungen

Aufgabe 1: Quadratische Bruchgleichung

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$\frac{2x-8}{x^2-9} + \frac{2x-5}{x^2-3x} = \frac{3x-4}{x^2+3x}$$

Lösung

Nenner durch Ausklammern und binomische Formeln in Faktoren aufspalten:

$$HN = x \cdot (x-3) \cdot (x+3) \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\} \quad (1)$$

$$\frac{2x-8}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x-5}{(x-3)x} = \frac{3x-4}{(x+3)x} \quad | \cdot x \cdot (x-3) \cdot (x+3) \quad (1)$$

$$(2x-8)x + (2x-5)(x+3) = (3x-4)(x-3) \quad | \text{ Ausmultiplizieren und auf die linke Seite bringen} \quad (1)$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0 \quad | \text{ p-q-Formel} \quad (1)$$

$$x_1 = -9 \text{ und } x_2 = 3 \quad | \text{ mit Definitionsbereich vergleichen} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \{-9\} \quad (1)$$

Aufgabe 2: Quadratische Bruchgleichung

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$\frac{2x-14}{x^2-16} + \frac{2x-5}{x^2-4x} = \frac{3x-7}{x^2+4x}$$

Lösung

Nenner durch Ausklammern und binomische Formeln in Faktoren aufspalten:

$$HN = x \cdot (x-4) \cdot (x+4) \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0; 4\} \quad (1)$$

$$\frac{2x-14}{(x-4)(x+4)} + \frac{2x-5}{(x-4)x} = \frac{3x-7}{(x+4)x} \quad | \cdot x \cdot (x-4) \cdot (x+4) \quad (1)$$

$$(2x-14) \cdot x + (2x-5) \cdot (x+4) = (3x-7) \cdot (x-4) \quad | \text{ Ausmultiplizieren und auf die linke Seite bringen} \quad (1)$$

$$x^2 + 8x - 48 = 0 \quad | \text{ p-q-Formel} \quad (1)$$

$$x_1 = -12 \text{ und } x_2 = 4 \quad | \text{ mit Definitionsbereich vergleichen} \quad (1)$$

$$L = \{-12\} \quad (1)$$

Aufgabe 3: Quadratische Bruchgleichung

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-3x-5}{x^2-x-6}$$

Lösung

Nenner durch Ausklammern und binomische Formeln in Faktoren aufspalten:

$$HN = (x-3) \cdot (x+2) \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} \quad (1)$$

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x-4}{x-3} = \frac{x^2-3x-5}{x^2-x-6} \quad | \cdot HN \quad (1)$$

$$(x-1)(x-3) + (x-4)(x+2) = x^2-3x-5 \quad | \text{ Ausmultiplizieren} \quad (1)$$

$$(x^2-x-3x+3) + (x^2-4x+2x-8) = x^2-3x-5 \quad | -x^2+3x+5 \quad (1)$$

$$x^2-3x=0 \quad | \text{ Satz vom Nullprodukt oder p-q-Formel} \quad (1)$$

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 3 \quad | \text{ Vergleich mit der Definitionsmenge} \quad (1)$$

$$L = \{0\} \quad (1)$$

Aufgabe 4: Quadratische Bruchgleichung

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{x^2+3x} + \frac{x+7}{x^2-5x} = \frac{x^2+x+34}{x \cdot (x+3) \cdot (x-5)}$$

Lösung

Nenner durch Ausklammern und binomische Formeln in Faktoren aufspalten:

$$\text{HN } x \cdot (x+3) \cdot (x-5) \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 5\} \quad (1)$$

$$\frac{x-2}{x^2+3x} + \frac{x+7}{x^2-5x} = \frac{x^2+x+34}{x \cdot (x+3) \cdot (x-5)} \quad | \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x-5) \quad (1)$$

$$(x-5)(x-2) + (x+7)(x+3) = x^2+x+34 \quad | \text{ Ausmultiplizieren und auf die linke Seite bringen } \quad (1)$$

$$x^2+2x-3=0 \quad | \text{ p-q-Formel } \quad (1)$$

$$x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2 \quad | \text{ mit Definitionsbereich vergleichen } \quad (1)$$

$$L = \{2\} \quad (1)$$

Aufgabe 5: Quadratische Bruchgleichung

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x+7}{x^2-3x} = \frac{x^2+10}{x \cdot (x-3) \cdot (x+2)}$$

Lösung

Nenner durch Ausklammern und binomische Formeln in Faktoren aufspalten und linken Summanden durch $(x-2)$ kürzen (!):

$$\text{HN } x \cdot (x-3) \cdot (x+2) \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2; 0; 3\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x+7}{x^2-3x} = \frac{x^2+10}{x \cdot (x-3) \cdot (x+2)} \quad | \cdot x \cdot (x-3) \cdot (x+2) \quad (1)$$

$$x \cdot (x-3) + (x+7)(x+2) = x^2+10 \quad | \text{ Ausmultiplizieren und auf die linke Seite bringen } \quad (1)$$

$$x^2+6x+4=0 \quad | \text{ p-q-Formel } \quad (1)$$

$$x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{5} \quad | \text{ mit Definitionsbereich vergleichen } \quad (1)$$

$$L = \{-3 \pm \sqrt{5}\} \quad (1)$$

Aufgabe 6: Substitution (2)

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$$

Lösung

$$\text{Substitution } z = x^2 \text{ ergibt } z_1 = 1 \text{ und } z_2 = 2 \Rightarrow L = \{\pm 1; \pm \sqrt{2}\}$$

Aufgabe 7: Substitution (2)

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$3x^4 - 6x^2 - 9 = 0$$

Lösung

$$\text{Substitution } z = x^2 \text{ ergibt } z_1 = -1 \text{ und } z_2 = 3 \Rightarrow L = \{\pm \sqrt{3}\}$$