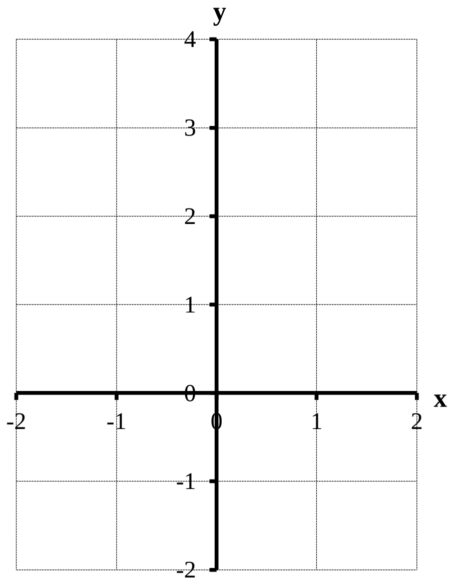
4.2. Quadratische Funktionen

Definition: Normalform der Parabelgleichung
Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit **Formfaktor** $a \neq 0$ und beliebigen **Koeffizienten** b bzw. c heißt **quadratische Funktion** oder **ganzrationale Funktion 2. Grades in Normalform**. Ihr Graph ist eine **Parabel**.

4.2.1. Stauchung und Streckung von Parabeln

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$
-2				
-1				
$-\frac{1}{2}$				
0				
$\frac{1}{2}$				
1				
2				



Stauchung und Streckung mit dem Formfaktor a

Ein **positiver Formfaktor** $\begin{cases} a & 1 \\ a & 1 \end{cases}$ bewirkt eine $\left\{\begin{matrix}\text{Streckung}\\ \text{Stauchung}\end{matrix}\right\}$ der **nach** _________ geöffneten Parabel.

Ein **negativer Formfaktor a** bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach** _________.

4.2.4. Verschiebung von Parabeln

a) Trage die y-Werte der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$ in die 2. Spalte der Wertetabelle ein und zeichne die Parabel rechts ein..

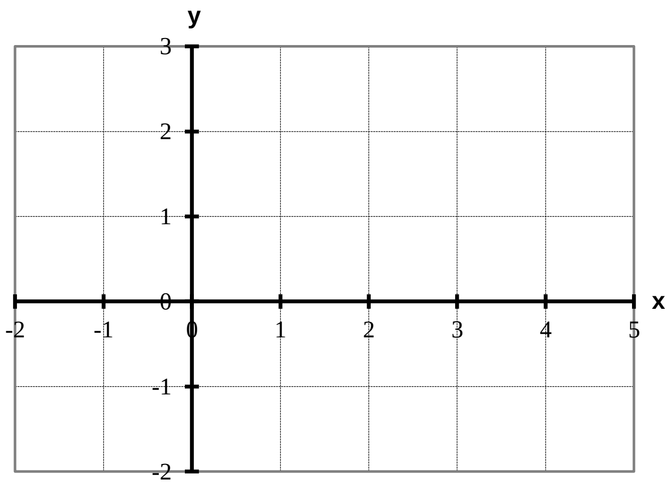
b) Verschiebe die Parabel um $y_0 = \mathbf{2}$ Einheiten nach **oben** und trage die passenden y-Werte in die 3. Spalte der Wertetabelle ein. Trage zum Schluss die Funktionsgleichung der in y-Richtung verschobenen Parabel ein.

c) Verschiebe die Parabel um $x_0 = \mathbf{3}$ Einheiten nach **rechts** und trage die passenden y-Werte in die 4. Spalte der Wertetabelle ein. Trage zum Schluss die Funktionsgleichung der in x-Richtung verschobenen Parabel ein.

d) Verschiebe die Parabel um $x_0 = \mathbf{3}$ Einheiten nach **rechts** sowie um $y_0 = \mathbf{2}$ Einheiten nach **oben** und trage die passenden y-Werte in die 5. Spalte der Wertetabelle ein. Formuliere die Funktionsgleichung verschobenen Parabel.

e) Vervollständige die darunter stehende Regel zur Verschiebung von Graphen

x	$-\frac{1}{2}x^2$			
-2				
-1				
0				
1				
2				
3				
4				
5				



Verschiebung

Man verschiebt die Parabel $y = ax^2$ um $\mathbf{y_0}$ **in y-Richtung**, indem man y durch ________ ersetzt.

Die Parabel bleibt stehen und das ____________________ wird um __ in **Gegenrichtung** verschoben.

Man verschiebt die Parabel $y = ax^2$ um $\mathbf{x_0}$ **in x-Richtung**, indem man x durch ________ ersetzt.

Die Parabel bleibt stehen und das ____________________ wird um __ in **Gegenrichtung** verschoben.

Die verschobene Parabel hat dann die Gleichung ________ = ____________ bzw. y = ________________.

Beispiele für eine Verschiebung in y-Richtung:

a) Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um $y_0 = +2$ **nach oben**, indem man y durch __________ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird ________ $= -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y =$ __________.

b) Man verschiebt die **Parabel** $y = 2x^2$ um $y_0 = +5$ **nach oben**, indem man y durch __________ ersetzt:

Aus $y = 2x^2$ wird ________ $= 2x^2 \Leftrightarrow y =$ __________.

Beispiel für eine Verschiebung in x-Richtung

a) Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um $x_0 = +3$ **nach rechts**, indem man x durch ___________ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird y = ______________.

b) Man verschiebt die **Parabel** $y = \frac{1}{3}x^2$ um $x_0 = +4$ **nach rechts**, indem man x durch ___________ ersetzt:

Aus $y = \frac{1}{3}x^2$ wird y = ______________.

Verschiebung in x- und y-Richtung

Man verschiebt den **Graphen** $y = f(x)$ **um** $\mathbf{+x_0}$ **in x-Richtung und um** $\mathbf{+ y_0}$ **in y-Richtung**, indem man x durch ________ und y durch ________ ersetzt:

Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus y = f(x) wird __________ = f(_________). ⇔ y = f(_________) __________

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)^2$ bzw. **y =** _____________________ heißt **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung mit **Scheitelpunkt** S(___|___) und **Formfaktor** ___.

Beispiele für Verschiebungen in x- und y-Richtung

a) Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um x_0 = + 2 nach oben und y_0 = +3 nach rechts**, indem man y durch ________ und x durch ________ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird ________ $= -\frac{1}{2}$ (________ $)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ (________ $)^2$ ________

b) Man verschiebt die **Parabel** $y = \frac{1}{4}x^2$ **um x_0 = −2 nach unten und y_0 = −3 nach links**, indem man y durch ________ und x durch _________ ersetzt:

Aus $y = \frac{1}{4}x^2$ wird ________ $= \frac{1}{4}$(________ $)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$(________ $)^2$ ________

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel 1: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$y = x^2 - 2x + 5$ | ± __ (**Quadratische Ergänzung**)

$y = \underbrace{x^2 - 2x + \_\_}\ \underbrace{- \_\_ + 5}$ | __. binomische Formel und zusammenfassen

$y = (x - \_\_)^2 + \_\_\_$

Der Scheitelpunkt ist also S(__|__)

Beispiel 2: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$y = 12x^2 + 24x + 9$ | 12 ausklammern

$y = 12 \boxed{\qquad\qquad\qquad}$ | ± __ (**Quadratische Ergänzung**)

$y = 12 \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ | __. binomische Formel und zusammenfassen

$y = 12 \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ | Eckige Klammer auflösen

$y = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Der Scheitelpunkt ist also S(__|__)

4.2.5. Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel

Satz:

Die Nullstellen von $y = x^2 + px + q$ liegen bei $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$,

wenn die **Diskriminante** $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist.

Beweis:

y = 0 setzen und mit ____________________ Ergänzung nach x auflösen:

$$0 = x^2 + px + q \qquad | \pm \boxed{\quad} \quad \text{(quadratische Ergänzung)}$$

$$0 = \underbrace{x^2 + 2\cdot\boxed{\quad}x + \boxed{\quad}} - \boxed{\quad} + q \qquad | \text{ binomische Formel}$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \boxed{\quad} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad | + \boxed{\quad} - \boxed{\quad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\boxed{\qquad\qquad} = x_{1/2} + \frac{p}{2} \qquad | \boxed{\quad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad} = x_{1/2}, \text{ qed!}$$

Beispiel 1:
Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 - 8x + 5$

Lösung:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

*Übungen**:** Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 a) - g)*

Beispiel 2:

Bestimme die Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Lösung: Steigungsfaktor ausklammern und p-q-Formel anwenden:

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \qquad | \text{ Steigungsfaktor ausklammern}$$

$$0 = \frac{1}{2}\boxed{\qquad\qquad\qquad} \qquad |\cdot \boxed{\quad}$$

$$0 = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \qquad | \text{ p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

4.2.6. Nullstellenbestimmung durch Faktorisieren mit dem Satz von Vieta

Satz von Vieta:

Die quadratische Funktion

$f(x) = x^2 + (u + v)x + u \cdot v$

$\quad = (x + u)\cdot(x + v)$

hat die Nullstellen $x_1 = -u$ und $x_2 = -v$.

Beispiel:

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Lösung:

5 = __ + __ und 6 = __·__ ⇒ u = __ und v = __

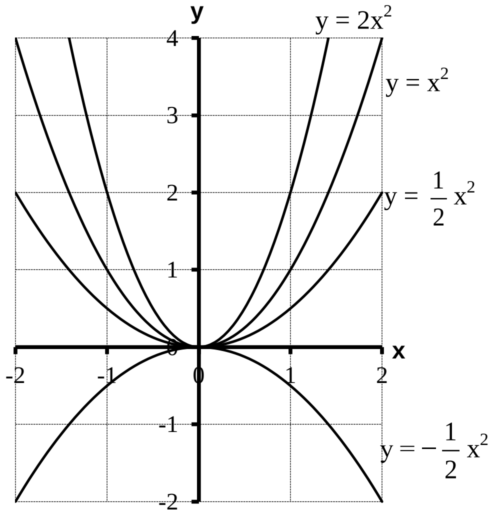
⇒f(x) = (x + __)(x + __) hat die Nullstellen x_1 = ___ und x_2 = ___

4.2. Quadratische Funktionen

4.2.1. Streckung und Stauchung von Parabeln

Beispiele:

x	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2$
−2	2	4	8	−2
−1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
2	2	4	8	−2



Stauchung und Streckung von Schaubildern

Multiplikation mit **positiven** $\left\{\begin{matrix} a > 1 \\ a < 1 \end{matrix}\right\}$ bewirkt $\left\{\begin{matrix} \text{Streckung} \\ \text{Stauchung} \end{matrix}\right\}$ in y-Richtung der **nach oben** geöffneten Parabel.

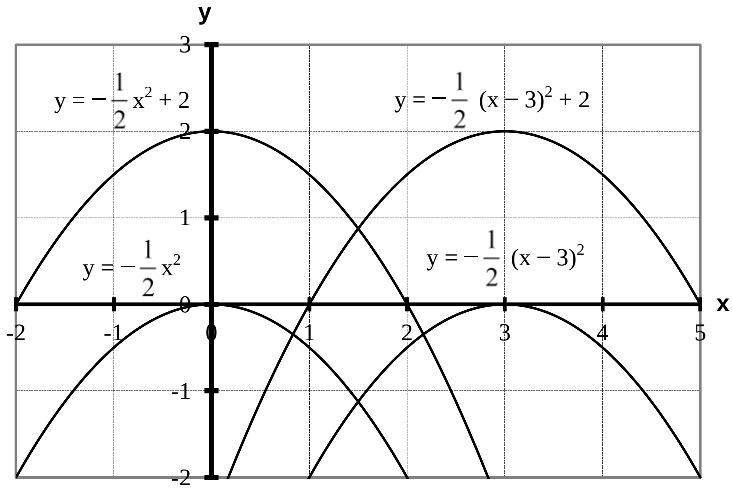
Multiplikation mit **negativen** a bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach unten**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 1

4.2.2. Verschiebung von Parabeln

Beispiele:

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^2 + 2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
−2	−2	−2 + 2		
−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
0	0	0 + 2		
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$	−2	−2 + 2
2	−2	−2 + 2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
3			0	0 + 2
4			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
5			−2	−2 + 2



Verschiebung in y-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** um $+y_0$ in **y-Richtung**, indem man y durch $\mathbf{y - y_0}$ ersetzt.

Das **Koordinatensystem** wird um $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +2 **nach oben**, indem man y durch **y − 2** ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Verschiebung in x-Richtung
Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ um $+x_0$ **in x-Richtung**, indem man x durch $\mathbf{x - x_0}$ ersetzt:
Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.
Aus $y = f(x)$ wird $y = f(x - x_0)$.

Beispiel:
Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +3 **nach rechts**, indem man x durch $\mathbf{x - 3}$ ersetzt:
Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 3

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Verschiebung in x- und y-Richtung
Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ **um** $\mathbf{+x_0}$ **in x-Richtung und um** $\mathbf{+ y_0}$ **in y-Richtung**, indem man x durch $\mathbf{x - x_0}$ und y durch $\mathbf{y - y_0}$ ersetzt:
Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.
Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x - x_0)$. $\Leftrightarrow$ $y = f(x - x_0) + y_0$.

Beispiel:
Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um + 2 nach oben und +3 nach rechts**, indem man y durch $\mathbf{y - 2}$ und x durch $\mathbf{x - 3}$ ersetzt:
Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

Scheitelpunktform der Parabelgleichung
Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)^2$ bzw. $\mathbf{y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0}$ heißt **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung. $S(x_0|y_0)$ ist der **Scheitelpunkt** der Parabel. Der Koeffizient a heißt auch **Steigungsfaktor**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 4 - 6

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$y = x^2 - 2x + 5$ | ± 1 (**Quadratische Ergänzung**)

$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{}\ \underbrace{- 1 + 5}_{}$ | 2. binomische Formel und zusammenfassen

$y = (x - 1)^2 + 4$

Der Scheitelpunkt ist also S(1|4)

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 7 a) - g)

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$y = 12x^2 + 24x + 9$ | 12 ausklammern

$y = 12[x^2 + 2x + \frac{3}{4}]$ | ± 1 (**Quadratische Ergänzung**)

$y = 12[\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{}\ \underbrace{- 1 + \frac{3}{4}}_{}]$ | 1. binomische Formel und zusammenfassen

$y = 12[(x + 1)^2 - \frac{1}{4}]$ | Eckige Klammer auflösen

$y = 12(x + 1)^2 - 3$

Der Scheitelpunkt ist also S(−1|−3)

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 7 h) - r)

4.2.5. Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 8

Satz: Die Nullstellen von $y = x^2 + px + q$ liegen bei $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, wenn die **Diskriminante** $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist.

Beweis: y = 0 setzen und mit quadratischer Ergänzung nach x auflösen

$$0 = x^2 + px + q \qquad \Big|\ \pm\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$0 = \underbrace{x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}\ - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \Big|\ \text{binomische Formel}$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \Big|\ + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \qquad \Big|\ \sqrt{\ }$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = x_{1/2} + \frac{p}{2} \qquad \Big|\ -\frac{p}{2}$$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = x_{1/2},$$

Beispiel 1:
Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 - 8x + 5$

Lösung:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 5}$$

$$= 4 \pm \sqrt{11}\ .$$

*Übungen**:** Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 a) - g)*

Beispiel 2:

Bestimme die Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Lösung: Steigungsfaktor ausklammern und p-q-Formel anwenden:

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \qquad \Big|\ \text{Steigungsfaktor ausklammern}$$

$$0 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \qquad \Big|\cdot 2$$

$$0 = x^2 - 4x + 2 \qquad \Big|\ \text{p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}$$

*Übungen**:** Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 h) - r)*

4.2.6. Nullstellenbestimmung durch Faktorisieren mit dem Satz von Vieta

Einführung: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 10

Satz von Vieta:
Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + (u + v)x + u\cdot v = (x + u)\cdot(x + v)$ hat die Nullstellen $x_1 = -u$ und $x_2 = -v$.

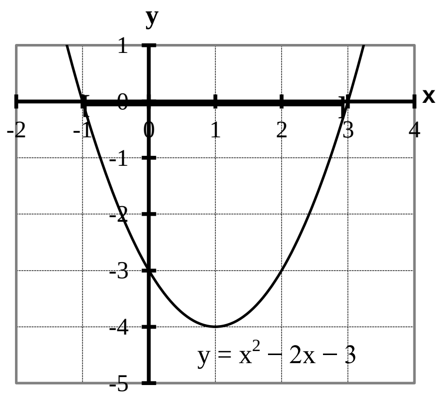
Beispiel:
Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Lösung:
$5 = 2 + 3$ und $6 = 2\cdot 3 \Rightarrow u = 2$ und $v = 3$
$\Rightarrow f(x) = (x + 2)(x + 3)$ mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11

4.2.7. Quadratische Ungleichungen

Beispiel
Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.



Lösung:
Lösen der entsprechenden **Gleichung** mit p-q-Formel oder Vieta:
$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm 2$

Die **Nullstellen** der Parabel bedeuten einen **Vorzeichenwechsel** und legen daher die Grenzen der Lösungsmenge fest.

Um zu entscheiden, ob die Lösungsmenge innerhalb oder außerhalb dieser Grenzen liegt, betrachtet man die **Öffnung** der Parabel.

In diesem Fall ist sie **nach oben** geöffnet, so dass die gesuchten **negativen** Werte **zwischen** den Nullstellen liegen

$\Rightarrow L = [-1; 3]$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 12

Übersicht zu quadratischen Funktionen

Produktform		Normalform		Scheitelpunktform
$f(x) = a(x + u)(x + v)$	← Satz von Vieta / Ausmultiplizieren →	$f(x) = ax^2 + bx + c$	→ quadrat. Ergänzung / Ausmultiplizieren ←	$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$
↓		↓		↓
Nullstellen $x_1 = -u$ $x_2 = -v$		Dehnung/Öffnung a Achsenschnittpunkte $P(0\vert c)$ und $P(x_{1/2}\vert 0)$ mit p-q-Formel		Dehnung/Öffnung a Scheitelpunkt $S(x_0\vert y_0)$
↘		↓		↙
		Schaubild		

4.2.8. Ortskurven

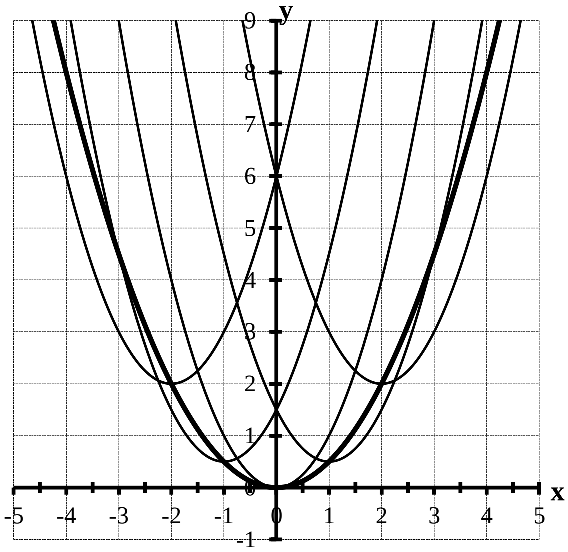
Beispiel

Gegeben sei eine Schar von Parabeln durch die Gleichung: $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Skizziere die Schaubilder von f_t für $t \in \{0; \pm1; \pm2\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem
b) Bestimme die Koordinaten des Scheitels in Abhängigkeit vom Parameter t.
c) Wie lautet die Funktionsgleichung der **Ortskurve**, auf dem die Scheitel aller Parabeln für beliebige $t \in \mathbb{R}$ liegen?
d) Bestimme t so, dass das Schaubild von f_t durch den Punkt P(0|8) verläuft.

Lösung:

a) Skizze:



b) $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$

$= (x - t)^2 + \frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow$ $S(t|\frac{1}{2}t^2)$ für $t \in \mathbb{R}$.

c) Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind x = t und $y = \frac{1}{2}t^2$. Durch **Einsetzen** von x = t kann man t eliminieren und erhält die **Ortskurve** $y = \frac{1}{2}x^2$.

d) $f_t(0) = 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t^2 = 8 \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 13

4.2.9. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Beispiel: Bestimme die Schnittpunkte von $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = 3x^2 - 4x - 6$

Lösung:

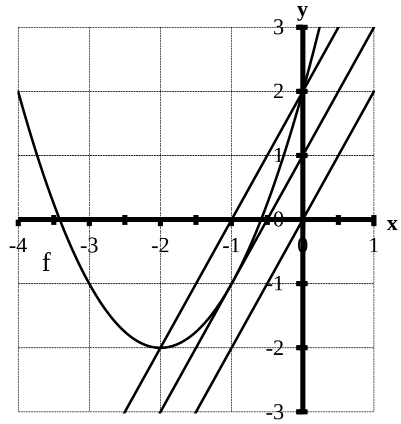
$f(x) = g(x)$		|**Gleichsetzen**
$-x^2 + 2 = 3x^2 - 4x - 6$		| $+ x^2 - 2$
$0 = 4x^2 - 4x - 8$		| Öffnungsfaktor ausklammern
$0 = 4(x^2 - x - 2)$		|**Nullstellenbestimmung** mit p-q-Formel oder Vieta
$0 = 4(x - 2)(x + 1)$		
$\Rightarrow x_1 = -1$ mit $f(-1) = g(-1) = 1$ und		|**Einsetzen** der Schnittstellen x_1 und x_2
$x_2 = 2$ mit $f(2) = g(2) = -2$		

$\Rightarrow$ Schnittpunkte $S_1(2|-2)$ und $S_2(-1|1)$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 14

Beispiel für gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen
Welche Bedingung muss für t gelten, damit die Gerade $g_t(x) = 2x + t$ die Parabel $f(x) = x^2 + 4x + 2$

a) schneidet
b) berührt
c) passiert?



Lösung:
Gleichsetzen $f(x) = g_t(x)$ ergibt die Lösungen
$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{t-1}$, falls $t \geq 1$, also

a) 2 Schnittpunkte (**Sekante**) bei $t > 1$
b) 1 Berührungspunkt (**Tangente**) bei $t = 1$
c) keine Berührung bei $t < 1$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 15

4.2.10. Bestimmung von Funktionsgleichungen

Beispiel für drei gegebene Punkte

Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(-1|-3)$, $P_2(-2|-24)$ und $P_3(2|24)$ verläuft.
Lösung:
Durch Einsetzen der drei Punkte in die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ erhält man drei lineare Gleichungen für die drei zu bestimmenden Koeffizienten a, b und c. Das LGS wird mit dem **Diagonalverfahren** gelöst (siehe 1.4.4.):

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \cdot(-4) \quad \cdot(-4) \\
P_2 & 4a & - & 2b & + & c & = & -24 & \quad + \qquad + \\
P_3 & 4a & + & 2b & + & c & = & 24 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \\
P_2 & & & 2b & - & 3c & = & -12 & \cdot(-3) \\
P_3 & & & 6b & - & 3c & = & 36 & \quad +
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \\
P_2 & & & 2b & - & 3c & = & -12 & \quad + \qquad\quad + \\
P_3 & & & & & 6c & = & 72 & :2 \quad :(-6)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & & & = & -15 & \\
P_2 & & & 2b & & & = & 24 & :2 \quad + \\
P_3 & & & & & c & = & 12 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|}
P_1 & a & & & & & = & -3 \\
P_2 & & & b & & & = & 12 \\
P_3 & & & & & c & = & 12
\end{array}$$

Lösung: $f(x) = -3x^2 + 12x + 12$. **Probe**: durch **Einsetzen** der Punkte

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 16

Beispiel für zwei gegebene Punkte, von denen einer der Scheitelpunkt ist

Bestimme die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt S(4|3), die außerdem durch P(2|5) verläuft.
Lösung:
Die Koordinaten des Scheitelpunktes S(4|3) setzt man direkt in die Scheitelpunktform ein $f(x) = a(x - 4)^2 + 3$. Den Steigungsfaktor a bestimmt man anschließend durch Einsetzen des zweiten Punktes P(2|5):

$$\begin{array}{rll}
f(2) & = 5 & \\
a(2-4)^2 + 3 & = 5 & \\
a \cdot 4 + 3 & = 5 & |-3;\ :4 \\
a & = \frac{1}{2} &
\end{array}$$

Die gesuchte Funktion ist also $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 17 - 20