

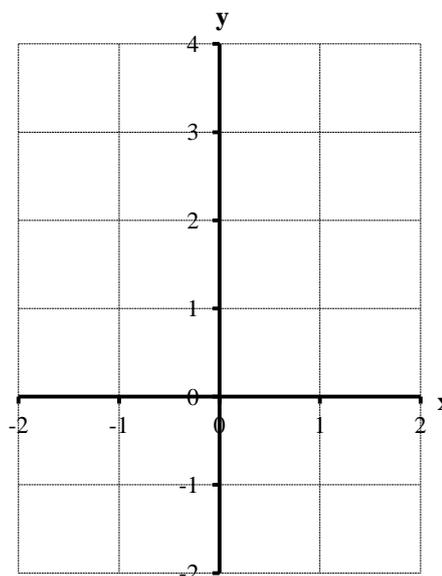
4.2. Quadratische Funktionen

Definition: Normalform der Parabelgleichung

Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit **Formfaktor** $a \neq 0$ und beliebigen **Koeffizienten** b bzw. c heißt **quadratische Funktion** oder **ganzrationale Funktion 2. Grades in Normalform**. Ihr Graph ist eine **Parabel**.

4.2.1. Stauchung und Streckung von Parabeln

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$
-2				
-1				
$-\frac{1}{2}$				
0				
$\frac{1}{2}$				
1				
2				



Stauchung und Streckung mit dem Formfaktor a

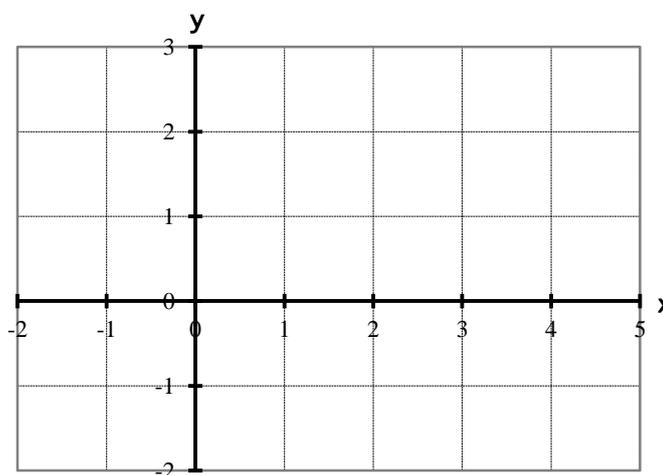
Ein **positiver Formfaktor** $\begin{Bmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{Bmatrix}$ bewirkt eine $\begin{Bmatrix} \text{Streckung} \\ \text{Stauchung} \end{Bmatrix}$ der **nach** _____ geöffneten Parabel.

Ein **negativer Formfaktor a** bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach** _____.

4.2.4. Verschiebung von Parabeln

- Trage die y-Werte der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$ in die 2. Spalte der Wertetabelle ein und zeichne die Parabel rechts ein..
- Verschiebe die Parabel um $y_0 = 2$ Einheiten nach **oben** und trage die passenden y-Werte in die 3. Spalte der Wertetabelle ein. Trage zum Schluss die Funktionsgleichung der in y-Richtung verschobenen Parabel ein.
- Verschiebe die Parabel um $x_0 = 3$ Einheiten nach **rechts** und trage die passenden y-Werte in die 4. Spalte der Wertetabelle ein. Trage zum Schluss die Funktionsgleichung der in x-Richtung verschobenen Parabel ein.
- Verschiebe die Parabel um $x_0 = 3$ Einheiten nach **rechts** sowie um $y_0 = 2$ Einheiten nach **oben** und trage die passenden y-Werte in die 5. Spalte der Wertetabelle ein. Formuliere die Funktionsgleichung verschobenen Parabel.
- Vervollständige die darunter stehende Regel zur Verschiebung von Graphen

x	$-\frac{1}{2}x^2$			
-2				
-1				
0				
1				
2				
3				
4				
5				



Verschiebung

Man verschiebt die Parabel $y = ax^2$ um y_0 in **y-Richtung**, indem man y durch _____ ersetzt.

Die Parabel bleibt stehen und das _____ wird um ___ in **Gegenrichtung** verschoben.

Man verschiebt die Parabel $y = ax^2$ um x_0 in **x-Richtung**, indem man x durch _____ ersetzt.

Die Parabel bleibt stehen und das _____ wird um ___ in **Gegenrichtung** verschoben.

Die verschobene Parabel hat dann die Gleichung _____ = _____ bzw. $y =$ _____.

Beispiele für eine Verschiebung in y-Richtung:

a) Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um $y_0 = +2$ **nach oben**, indem man y durch _____ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird _____ = $-\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y =$ _____.

b) Man verschiebt die **Parabel** $y = 2x^2$ um $y_0 = +5$ **nach oben**, indem man y durch _____ ersetzt:

Aus $y = 2x^2$ wird _____ = $2x^2 \Leftrightarrow y =$ _____.

Beispiel für eine Verschiebung in x-Richtung

a) Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um $x_0 = +3$ **nach rechts**, indem man x durch _____ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y =$ _____.

b) Man verschiebt die **Parabel** $y = \frac{1}{3}x^2$ um $x_0 = +4$ **nach rechts**, indem man x durch _____ ersetzt:

Aus $y = \frac{1}{3}x^2$ wird $y =$ _____.

Verschiebung in x- und y-Richtung

Man verschiebt den **Graphen** $y = f(x)$ um $+x_0$ in **x-Richtung** und um $+y_0$ in **y-Richtung**, indem man x durch _____ und y durch _____ ersetzt:

Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird _____ = $f(\text{_____})$. $\Leftrightarrow y = f(\text{_____})$ _____

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2$ bzw. $y =$ _____ heißt

Scheitelpunktform der Parabelgleichung mit **Scheitelpunkt** $S(\text{____}|\text{____})$ und **Formfaktor** _____.

Beispiele für Verschiebungen in x- und y-Richtung

a) Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um** $x_0 = +2$ **nach oben** und $y_0 = +3$ **nach rechts**, indem man y durch _____ und x durch _____ ersetzt:

$$\text{Aus } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ wird } \underline{\hspace{2cm}} = -\frac{1}{2}(\underline{\hspace{2cm}})^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(\underline{\hspace{2cm}})^2 \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Man verschiebt die **Parabel** $y = \frac{1}{4}x^2$ **um** $x_0 = -2$ **nach unten** und $y_0 = -3$ **nach links**, indem man y durch _____ und x durch _____ ersetzt:

$$\text{Aus } y = \frac{1}{4}x^2 \text{ wird } \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{4}(\underline{\hspace{2cm}})^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(\underline{\hspace{2cm}})^2 \underline{\hspace{2cm}}$$

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel 1: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 - 2x + 5 \quad | \pm \underline{\hspace{1cm}} \text{ (Quadratische Ergänzung)}$$

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + \underline{\hspace{1cm}}}_{(x - \underline{\hspace{1cm}})^2} - \underbrace{\underline{\hspace{1cm}} + 5}_{\underline{\hspace{1cm}}} \quad | \underline{\hspace{1cm}}. \text{ binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = (x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$$

Der Scheitelpunkt ist also S(|)

Beispiel 2: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = 12x^2 + 24x + 9 \quad | 12 \text{ ausklammern}$$

$$y = 12 \boxed{\hspace{3cm}} \quad | \pm \underline{\hspace{1cm}} \text{ (Quadratische Ergänzung)}$$

$$y = 12 \boxed{\hspace{4cm}} \quad | \underline{\hspace{1cm}}. \text{ binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = 12 \boxed{\hspace{4cm}} \quad | \text{Eckige Klammer auflösen}$$

$$y = \boxed{\hspace{4cm}}$$

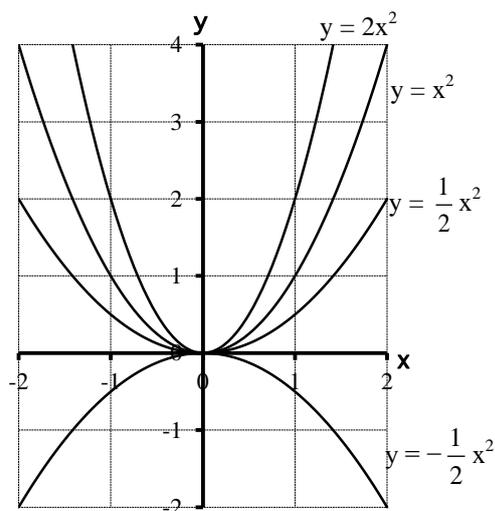
Der Scheitelpunkt ist also S(|)

4.2. Quadratische Funktionen

4.2.1. Streckung und Stauchung von Parabeln

Beispiele:

x	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2$
-2	2	4	8	-2
-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
2	2	4	8	-2



Stauchung und Streckung von Schaubildern

Multiplikation mit **positiven** $\begin{cases} a > 1 \\ a < 1 \end{cases}$ bewirkt $\begin{cases} \text{Streckung} \\ \text{Stauchung} \end{cases}$ in y-Richtung der **nach oben** geöffneten Parabel.

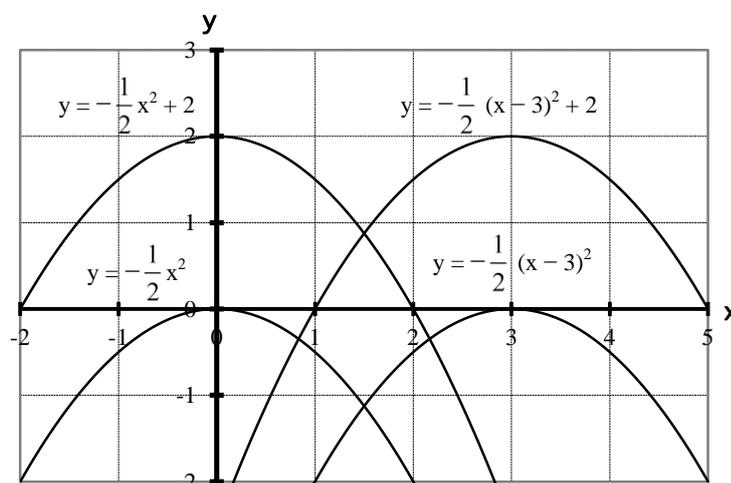
Multiplikation mit **negativen** a bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach unten**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 1

4.2.2. Verschiebung von Parabeln

Beispiele:

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^2 + 2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
-2	-2	-2+2		
-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
0	0	0+2		
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$	-2	-2+2
2	-2	-2+2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
3			0	0+2
4			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
5			-2	-2+2



Verschiebung in y-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** um $+y_0$ in **y-Richtung**, indem man y durch $y - y_0$ ersetzt.

Das **Koordinatensystem** wird um $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +2 **nach oben**, indem man y durch $y - 2$ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Verschiebung in x-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ um $+x_0$ **in x-Richtung**, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt:

Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y = f(x - x_0)$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um $+3$ **nach rechts**, indem man x durch $x - 3$ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 3

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Verschiebung in x- und y-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ **um $+x_0$ in x-Richtung und um $+y_0$ in y-Richtung**, indem man x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$ ersetzt:

Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x - x_0)$. $\Leftrightarrow y = f(x - x_0) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um $+2$ nach oben und $+3$ nach rechts**, indem man y durch $y - 2$ und x durch $x - 3$ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2$ bzw. $y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$ heißt **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung. $S(x_0|y_0)$ ist der **Scheitelpunkt** der Parabel. Der Koeffizient a heißt auch **Steigungsfaktor**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 4 - 6

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 - 2x + 5 \quad | \pm 1 \text{ (Quadratische Ergänzung)}$$

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + 5 \quad | 2. \text{ binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = (x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(1|4)$

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 7 a) - g)

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = 12x^2 + 24x + 9 \quad | 12 \text{ ausklammern}$$

$$y = 12\left[x^2 + 2x + \frac{3}{4}\right] \quad | \pm 1 \text{ (Quadratische Ergänzung)}$$

$$y = 12\left[\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1 + \frac{3}{4}\right] \quad | 1. \text{ binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = 12\left[(x + 1)^2 - \frac{1}{4}\right] \quad | \text{Eckige Klammer auflösen}$$

$$y = 12(x + 1)^2 - 3$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(-1|-3)$

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 7 h) - r)

4.2.5. Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 8

Satz: Die Nullstellen von $y = x^2 + px + q$ liegen bei $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, wenn die **Diskriminante** $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist.

Beweis: $y = 0$ setzen und mit quadratischer Ergänzung nach x auflösen

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q && | \pm \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)} \\ 0 &= x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q && | \text{ binomische Formel} \\ 0 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q && | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 && | \sqrt{} \\ \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} &= x_{1/2} + \frac{p}{2} && | - \frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} &= x_{1/2}, \end{aligned}$$

Beispiel 1:

Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 - 8x + 5$

Lösung:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 5} \\ &= 4 \pm \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 a) - g)

Beispiel 2:

Bestimme die Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Lösung: Steigungsfaktor ausklammern und p-q-Formel anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 && | \text{ Steigungsfaktor ausklammern} \\ 0 &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) && | \cdot 2 \\ 0 &= x^2 - 4x + 2 && | \text{ p-q-Formel} \\ x_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 2} \\ &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 h) - r)

4.2.6. Nullstellenbestimmung durch Faktorisieren mit dem Satz von Vieta

Einführung: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 10

Satz von Vieta:

Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + (u + v)x + u \cdot v = (x + u) \cdot (x + v)$ hat die Nullstellen $x_1 = -u$ und $x_2 = -v$.

Beispiel:

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Lösung:

$5 = 2 + 3$ und $6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow u = 2$ und $v = 3$

$\Rightarrow f(x) = (x + 2)(x + 3)$ mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11

4.2.7. Quadratische Ungleichungen

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

Lösung:

Lösen der entsprechenden **Gleichung** mit p-q-Formel oder Vieta:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm 2$$

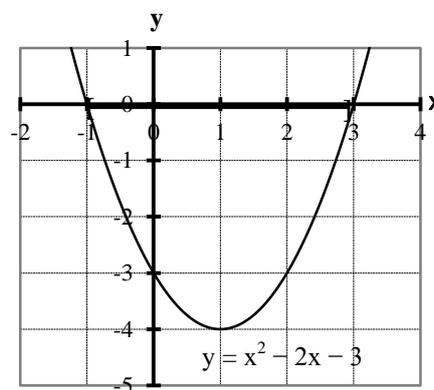
Die **Nullstellen** der Parabel bedeuten einen **Vorzeichenwechsel** und legen daher die Grenzen der Lösungsmenge fest.

Um zu entscheiden, ob die Lösungsmenge innerhalb oder außerhalb dieser Grenzen liegt, betrachtet man die **Öffnung** der Parabel.

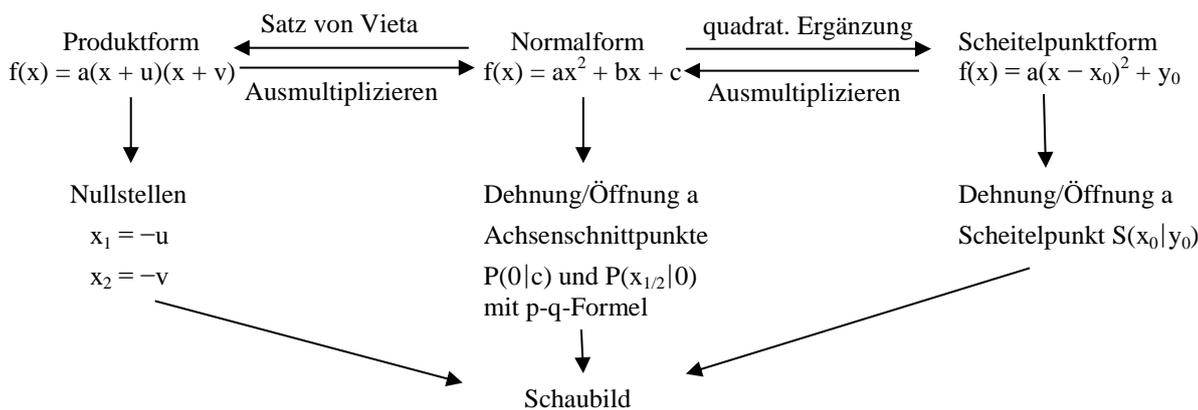
In diesem Fall ist sie **nach oben** geöffnet, so dass die gesuchten **negativen** Werte **zwischen** den Nullstellen liegen

$$\Rightarrow L = [-1; 3]$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 12



Übersicht zu quadratischen Funktionen



4.2.8. Ortskurven

Beispiel

Gegeben sei eine Schar von Parabeln durch die Gleichung: $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- Skizziere die Schaubilder von f_t für $t \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem
- Bestimme die Koordinaten des Scheitels in Abhängigkeit vom Parameter t .
- Wie lautet die Funktionsgleichung der **Ortskurve**, auf dem die Scheitel aller Parabeln für beliebige $t \in \mathbb{R}$ liegen?
- Bestimme t so, dass das Schaubild von f_t durch den Punkt $P(0|8)$ verläuft.

Lösung:

a) Skizze:

$$b) \quad f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$$

$$= (x - t)^2 + \frac{1}{2}t^2$$

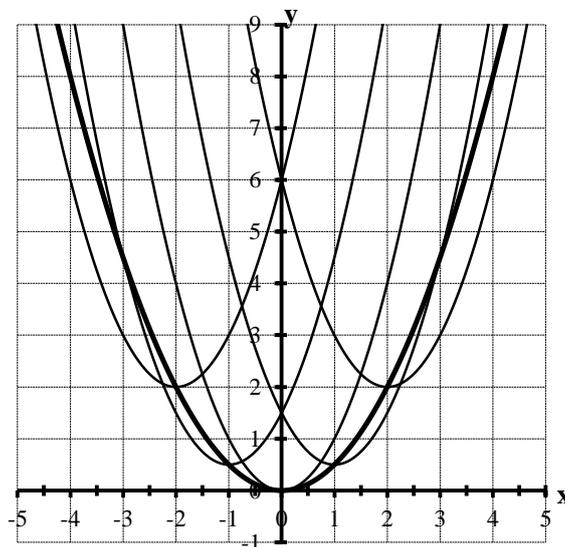
$$\Rightarrow S(t | \frac{1}{2}t^2) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

c) Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $x = t$ und $y = \frac{1}{2}t^2$.

Durch **Einsetzen** von $x = t$ kann man t eliminieren und erhält die **Ortskurve** $y = \frac{1}{2}x^2$.

$$d) \quad f_t(0) = 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t^2 = 8 \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 13



4.2.9. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Beispiel: Bestimme die Schnittpunkte von $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = 3x^2 - 4x - 6$

Lösung:

$f(x) = g(x)$	 Gleichsetzen
$-x^2 + 2 = 3x^2 - 4x - 6$	$ + x^2 - 2$
$0 = 4x^2 - 4x - 8$	$ \text{Öffnungsfaktor ausklammern}$
$0 = 4(x^2 - x - 2)$	 Nullstellenbestimmung mit p-q-Formel oder Vieta
$0 = 4(x - 2)(x + 1)$	
$\Rightarrow x_1 = -1$ mit $f(-1) = g(-1) = 1$ und	 Einsetzen der Schnittstellen x_1 und x_2
$x_2 = 2$ mit $f(2) = g(2) = -2$	

\Rightarrow Schnittpunkte $S_1(2|-2)$ und $S_2(-1|1)$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 14

Beispiel für gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen

Welche Bedingung muss für t gelten, damit die Gerade $g_t(x) = 2x + t$ die Parabel $f(x) = x^2 + 4x + 2$

- schneidet
- berührt
- passiert?

Lösung:

Gleichsetzen $f(x) = g_t(x)$ ergibt die Lösungen

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{t-1}, \text{ falls } t \geq 1, \text{ also}$$

- 2 Schnittpunkte (**Sekante**) bei $t > 1$
- 1 Berührungspunkt (**Tangente**) bei $t = 1$
- keine Berührung bei $t < 1$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 15

