4.3. Wurzel- und Betragsfunktionen

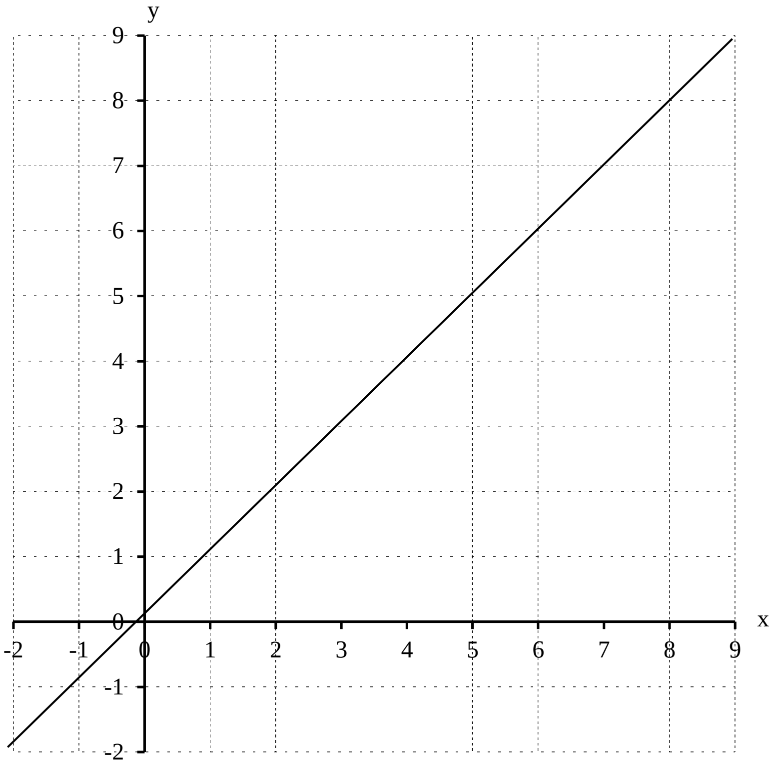
4.3.1. Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Definition: (siehe 1.4.1)

Die **Wurzel** $\sqrt{a} \geq 0$ einer ____________ Zahl $a \geq 0$ ist die __________ Zahl, deren __________ wieder a ergibt: $(\sqrt{a})^2 = a$.

Graphen

$x = \sqrt{y}$ $y = \sqrt{x}$	$y = x^2$ $x = y^2$
0	
	$\frac{1}{4}$
1	
	4
3	



Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die _______________ des Quadrierens:

Merke:

Man erhält

- den **Graphen** der Umkehrfunktion aus dem Graphen der Funktion durch ___________________ an der 1. Winkelhalbierenden
- die **Funktionsgleichung** der Umkehrfunktion durch _______________ der Funktionsgleichung nach x und _______________________ von x und y.

4.3. Wurzel- und Betragsfunktionen

4.3.1. Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Definition: (siehe 1.4.1)
Die **Wurzel** $\sqrt{a} \geq 0$ einer **positiven** Zahl $a \geq 0$ ist die **positive** Zahl, deren Quadrat wieder a ergibt: $(\sqrt{a})^2 = a$.

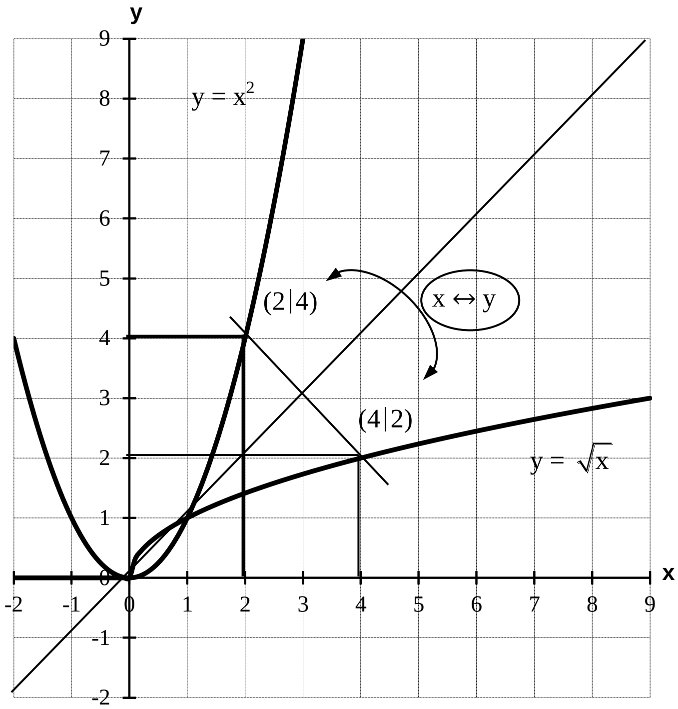
Schaubilder

quadrieren: ^{2}

$x \leftrightarrow y$ | $x \leftrightarrow y$

$x = \sqrt{y}$ $y = \sqrt{x}$	$y = x^2$ $x = y^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
3	9

radizieren: $\sqrt{\ }$



Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die **Umkehrung** des Quadrierens:

Merke:
Man erhält
- den **Graphen** der Umkehrfunktion aus dem Graphen der Funktion durch **Spiegelung** an der 1. Winkelhalbierenden
- die **Funktionsgleichung** der Umkehrfunktion durch **Auflösen** der Funktionsgleichung nach x und **Vertauschung** von x und y.

Beispiel zur Bestimmung der Umkehrfunktion zu einer Geraden
Bestimme die Gleichung der Umkehrfunktion zu $y = 3x - 4$.

Lösung:

$y = 3x - 4 \qquad |+ 4; :3$

$\frac{1}{3}y + \frac{4}{3} = x \qquad |\text{Vertauschung von x und y}$

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = y$

Beispiel zur Bestimmung der Umkehrfunktion zu einer Parabel

Bestimme die Gleichung der Umkehrfunktion zu $y = (x-2)^2 - 3$

Lösung:

$y = (x-2)^2 - 3 \quad |+3$

$y + 3 = (x-2)^2 \quad |\sqrt{\ }$ mit $y \geq -3$ und $x \geq 2$

$\sqrt{y+3} = x - 2 \quad |+2$

$\sqrt{y+3} + 2 = x \quad$ |Vertauschung von x und y

$\sqrt{x+3} + 2 = y \quad$ mit $x \geq -3$ und $y \geq 2$ bzw. Definitionsbereich $D = [-3;\infty[$ und Wertebereich $W = [2;\infty[$

Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 1

4.3.2. Verschiebung und Streckung der Wurzelfunktion

Verschiebung und Streckung der Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ wird

- um x_0 in x-Richtung verschoben, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt,
- um y_0 in x-Richtung verschoben, indem man y durch $y - y_0$ ersetzt,
- um den Faktor a in y-Richtung gestreckt, indem man mit a multipliziert:

Die Gleichung der verschobenen und gestreckten Funktion ist dann $y - y_0 = a\cdot\sqrt{x - x_0}$

Beispiel zur Bestimmung der Lage einer Wurzelfunktion

Bestimme die Definitionsmenge und die Wertemenge von $f(x) = -\sqrt{x-1} + 3$. Beschreibe die Lage des Schaubildes durch Angabe des „Scheitelpunktes“ und der „Öffnung“.

Lösung: (siehe 1.3.1 und 1.3.2)

$y = -\sqrt{x-1} + 3 \Leftrightarrow$

$y - 3 = -\sqrt{x-1}$

bedeutet:

- um $x_0 = 1$ in x-Richtung verschoben
- um $y_0 = 3$ in x-Richtung verschoben
- um $a = -1$ in y-Richtung gestreckt, d.h. an der x-Achse gespiegelt

⇒ „Scheitelpunkt“ S(1|3) und „Öffnung“ nach rechts unten

⇒ Definitionsbereich $D = [1;\infty[$ und Wertebereich $W =]-\infty; 3]$

Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 2

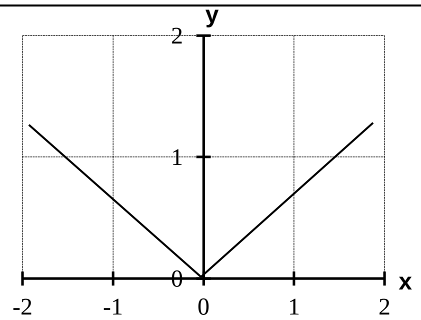
4.3.3. Die Betragsfunktion

Definition:

Die **Betragsfunktion** ist definiert als

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Schaubild:



Symmetrie: Die Betragsfunktion ist **gerade**: $|-x| = |x|$

Verschiebung und Streckung der Betragsfunktion

Die Wurzelfunktion $y = |x|$ wird

- um x_0 in x-Richtung verschoben, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt,
- um y_0 in x-Richtung verschoben, indem man y durch $y - y_0$ ersetzt,
- um den Faktor a in y-Richtung gestreckt, indem man mit a multipliziert:

Die Gleichung der verschobenen und gestreckten Funktion ist dann $y - y_0 = a\cdot|x - x_0|$

Beispiel zur Bestimmung der Lage einer Betragsfunktion

Bestimme die Definitionsmenge und die Wertemenge von $f(x) = -|x - 1| + 3$. Beschreibe die Lage des Schaubildes durch Angabe des „Scheitelpunktes“ und der „Öffnung“.

Lösung: (siehe 1.3.1 und 1.3.2)

$y = -|x - 1| + 3 \Leftrightarrow$

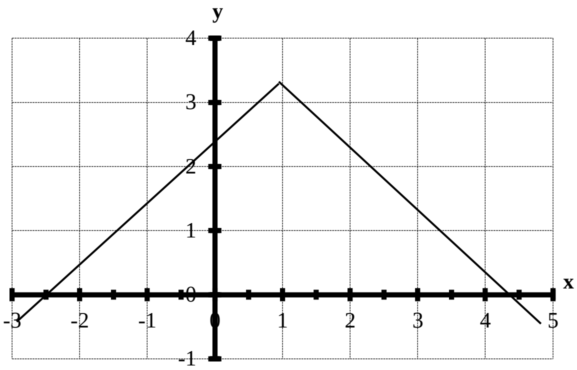
$y - 3 = -|x - 1|$
bedeutet:

- um $x_0 = 1$ in x-Richtung verschoben
- um $y_0 = 3$ in x-Richtung verschoben
- um $a = -1$ in y-Richtung gestreckt, d.h. an der x-Achse gespiegelt

⇒ „Scheitelpunkt“ S(1|3) und

⇒ „Öffnung“ nach unten

⇒ $D = \mathbb{R}$ und $W =]-\infty; 3]$



Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 3

4.3.4. Betragsgleichungen

Beispiel

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = |x + 2| - 3$.
Lösung:
Nullsetzen der Funktionsgleichung und Auflösen nach x mit Hilfe einer **Fallunterscheidung**:

$0 = f(x)$

$0 = |x + 2| - 3$

$3 = |x + 2|$

x ¤−2: $3 = x + 2$

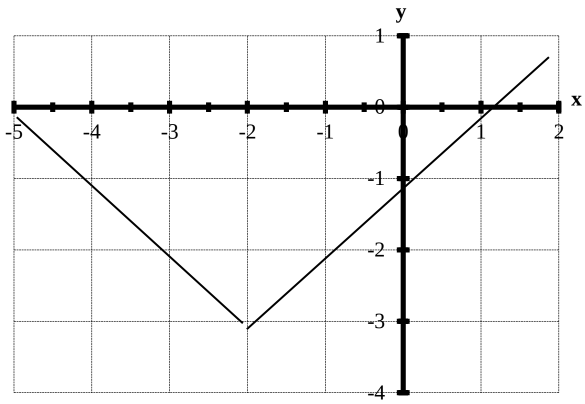
$\underline{1 = x}$

$x < -2$: $3 = -x - 2$

$\underline{-5 = x}$

Man erhält zwei Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$.

Schaubild: im Bereich $-6 \leq x \leq 2$ und $-4 \leq y \leq 1$ mit Fußpunkt S(−2|−3).



Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 4

4.3.5. Betragsungleichungen

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $|x + 2| - 3 \leq 0$.
Lösung: mit Hilfe einer Fallunterscheidung:

$x \geq -2$: $x + 2 - 3 \leq 0$

$\underline{x \leq 1}$

$x \leq -2$: $-x - 2 - 3 \leq 0$

$-x \leq 5$

$\underline{x \geq -5}$

⇒ $L = [-5,1]$.

Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 5