

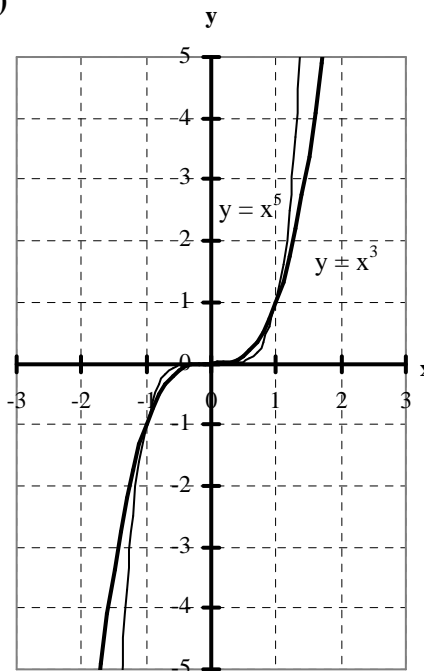
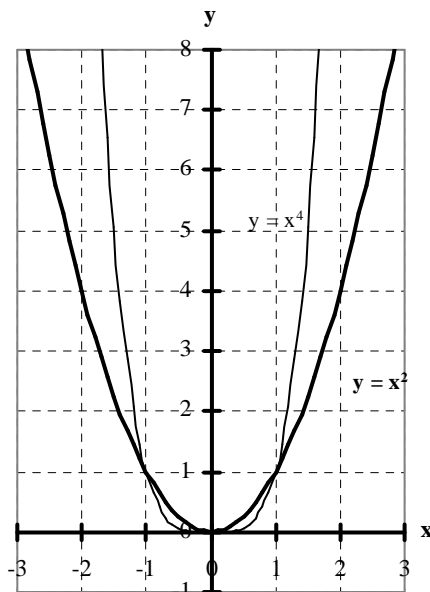
4.4. Potenzfunktionen

Definition: Eine Funktion der Form $f(x) = c \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}$ heißt **Potenzfunktion**.

4.4.1. Potenzfunktionen mit positiven Exponenten (Parabeln)

Schaubilder
und
Wertetabelle:

x	x^1	x^2	x^3	x^4
-2	-2	4	-8	16
-1	-1	1	-1	1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	1	1	1	1
2	2	4	8	16



Satz:

Eine Potenzfunktion mit **geraden (ungeraden)** Exponenten ist eine **gerade (ungerade)** Funktion.

Beweis:

Sei $f(x) = c \cdot x^n$ mit n gerade, dann ist n durch 2 teilbar, d.h., $n = 2m$ und $f(-x) = c \cdot (-x)^{2m} = c \cdot x^{2m} = c \cdot x^n = f(x)$. Sei andererseits n ungerade, dann ist $n - 1$ durch 2 teilbar, d.h., $n = 2m + 1$ und $f(-x) = c \cdot (-x)^{2m+1} = c \cdot (-x^{2m+1}) = -c \cdot x^{2m+1} = -c \cdot x^n = -f(x)$.

Eigenschaften der Potenzfunktionen

Symmetrie:

Eine Funktion f heißt

- **gerade** bzw. achsensymmetrisch zur y -Achse, falls $f(-x) = f(x)$ und
- **ungerade** bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$

für alle $x \in D$.

Beispiele

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^8 \text{ ist gerade, da } f(-x) &= (-x)^8 \\
 &= (-x)^2 (-x)^2 (-x)^2 (-x)^2 \\
 &= x^8 \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

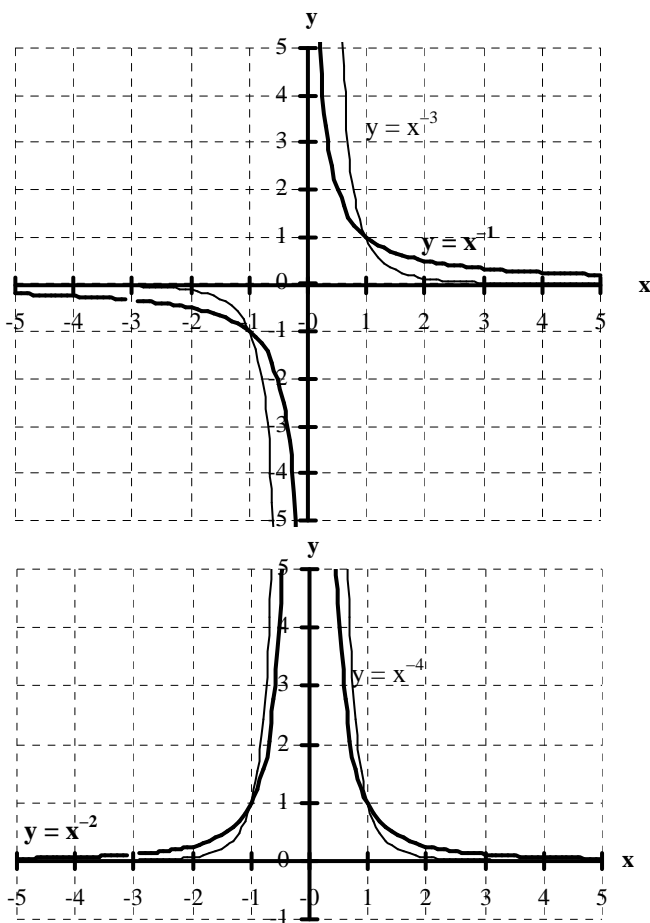
$$\begin{aligned}
 f(x) = x^7 \text{ ist ungerade, da } f(-x) &= (-x)^7 \\
 &= (-x)^2 (-x)^2 (-x)^2 (-x) \\
 &= -x^7 \\
 &= -f(x).
 \end{aligned}$$

4.4.2. Potenzfunktionen mit negativen Exponenten (Hyperbeln)

Wertetabelle

x	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}
-10	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
-1	-1	1	-1	1
$-\frac{1}{2}$	-2	4	-8	16
$-\frac{1}{10}$	-10	100	-1000	10000
0	-	-	-	-
$\frac{1}{10}$	10	100	1000	10000
$\frac{1}{2}$	2	4	8	16
1	1	1	1	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$

Schaubilder



Asymptoten

Eine Asymptote ist eine **Naherungsgerade** im Schaubild einer Funktion f: Das Schaubild kommt ihr für betragsgroe x oder y beliebig nahe. **Senkrechte Asymptoten** nennt man auch **Polstellen**.

Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$

Eine Funktion f strebt für $x \rightarrow \pm \infty$ gegen den **Grenzwert** (lat. limes) a, wenn die Funktionswerte f(x) für genügend kleine bzw. große x beliebig nahe an die Zahl a herankommen: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = a$. Das Schaubild von f besitzt dann für $x \rightarrow \pm \infty$ eine **waagrechte Asymptote** $y = a$.

Definitions- und Wertebereiche:

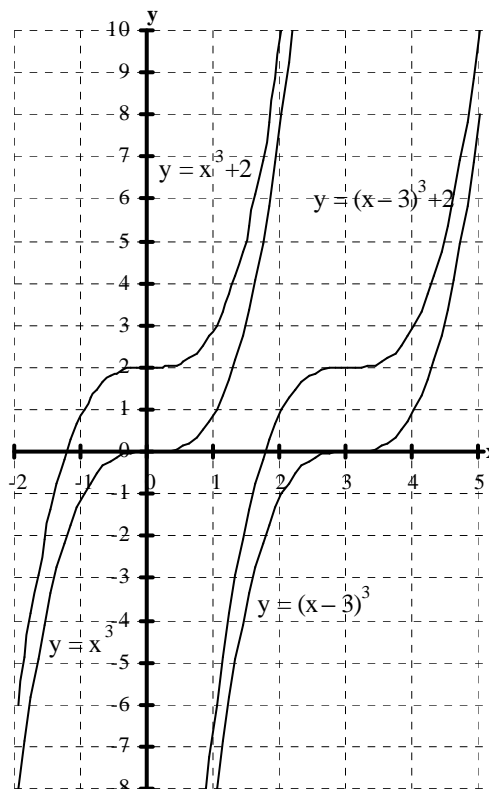
$y = x^z$	z gerade	z ungerade
$z > 0$	<p>$D = \mathbb{R}$ $W = [0; \infty[$</p>	<p>$D = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}$</p>
$z < 0$	<p>$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $W =]0; \infty[$</p>	<p>$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$</p>

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr.3 - 6

4.4.3. Verschiebung von Potenzfunktionen

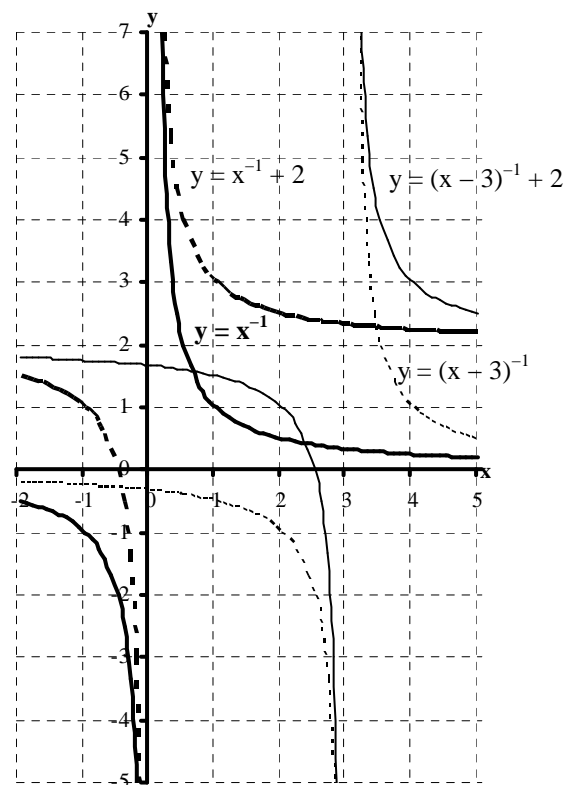
Beispiel 1: Verschiebung der kubischen Parabel $y = x^3$

x	x^3	$x^3 + 2$	$(x - 3)^3$	$(x - 3)^3 + 2$
-2	-8	-8 + 2		
-1	-1	-1 + 2		
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8} + 2$		
0	0	0 + 2		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + 2$		
1	1	1 + 2	-8	-8 + 2
2	8	8 + 2	-1	-1 + 2
$2\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8} + 2$
3			0	0 + 2
$3\frac{1}{2}$			$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + 2$
4			1	1 + 2
5			8	8 + 2



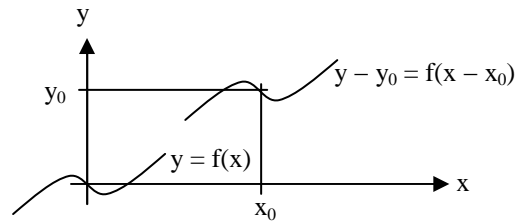
Beispiel 2: Verschiebung der Hyperbel $y = x^{-1}$

x	x^{-1}	$x^{-1} + 2$	$(x - 3)^{-1}$	$(x - 3)^{-1} + 2$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
-1	-1	-1 + 2		
$-\frac{1}{2}$	-2	-2 + 2		
0	0	0 + 2		
$\frac{1}{2}$	2	2 + 2		
1	1	1 + 2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + 2$	-1	-1 + 2
$2\frac{1}{2}$			-2	-2 + 2
3			0	0 + 2
$3\frac{1}{2}$			2	2 + 2
4			1	1 + 2
5			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + 2$



Verschiebung von Schaubildern

Man verschiebt das Schaubild von $y = f(x)$ um x_0 in x -Richtung und y_0 in y -Richtung, indem man in der Funktionsgleichung x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$ ersetzt. Das verschobene Schaubild hat dann die Gleichung $y - y_0 = f(x - x_0)$ bzw. $y = f(x - x_0) + y_0$.



Übungen: Verschiebung von Potenzfunktionen Nr. 1 - 6

Die allgemeine binomische Formel (Pascalsches Dreieck)

$(a + b)^0 =$	1
$(a + b)^1 =$	1a + 1b
$(a + b)^2 =$	1a² + 2ab + 1b²
$(a + b)^3 =$	1a³ + 3a²b + 3ab² + 1b³
$(a + b)^4 =$	1a⁴ + 4a³b + 6a²b² + 4ab³ + 1b⁴

Beispiel für die Verschiebung einer Parabel

Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{3}x^4$ um $x_0 = 3$ nach rechts und $y_0 = 1$ nach oben verschiebt. Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte.

Lösung:

$$\begin{aligned}y &= f(x) && | \text{ursprüngliche Funktion} \\y &= \frac{1}{3}x^4 && | y \text{ durch } y - 1 \text{ und } x \text{ durch } x - 3 \text{ ersetzen:} \\y - 1 &= f(x - 3) && | \text{verschobene Funktion} \\y - 1 &= \frac{1}{3}(x - 3)^4 && | \text{mit binomischer Formel ausmultiplizieren} \\y - 1 &= \frac{1}{3} \cdot [1x^4 + 4x^3 \cdot (-3) + 6x^2 \cdot (-3)^2 + 4x \cdot (-3)^3 + 1 \cdot (-3)^4] && | \text{ausmultiplizieren} \\y - 1 &= \frac{1}{3} \cdot [x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81] && | \text{ausmultiplizieren} \\y - 1 &= \frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 36x + 27 && | + 1 \\y &= \frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 36x + 28\end{aligned}$$

Die verschobene Funktion hat die Gleichung $y - 1 = f(x - 3)$ bzw. $y = \frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 36x + 28$. Ihr Schaubild ist eine verschobene Parabel 4. Grades, die symmetrisch zur Senkrechten bei $x = 3$ ist. Der Tiefpunkt ist $T(1|3)$. Für $x \rightarrow \pm \infty$ strebt auch $f(x)$ gegen $+\infty$, d.h., es gibt weder Asymptoten noch Grenzwerte.

Beispiel für die Verschiebung einer Hyperbel

Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von $f(x) = \frac{2}{x^2}$ um $x_0 = -2$ nach links und $y_0 = 3$ nach oben verschiebt. Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte.

Lösung:

$$\begin{aligned}y &= f(x) && | \text{ursprüngliche Funktion} \\y &= \frac{2}{x^2} && | y \text{ durch } y - 3 \text{ und } x \text{ durch } x + 2 \text{ ersetzen:} \\y - 3 &= f(x + 2) && | \text{verschobene Funktion} \\y - 3 &= \frac{2}{(x + 2)^2} && | \text{mit binomischer Formel ausmultiplizieren}\end{aligned}$$

$$y - 3 = \frac{2}{x^2 + 4x + 4} \quad | + 3$$

$$y = \frac{2}{x^2 + 4x + 4} + 3 \quad | \text{ auf gleichen Nenner bringen}$$

$$y = \frac{3x^2 + 12x + 14}{x^2 + 4x + 4}$$

Die verschobene Funktion hat die Gleichung $y - 3 = f(x + 2)$ bzw. $y = \frac{3x^2 + 12x + 14}{x^2 + 4x + 4}$. Ihr Schaubild ist eine verschobene Hyperbel 2. Grades, die symmetrisch zur senkrechten Asymptote bei $x = -2$ ist. Es besitzt außerdem eine waagrechte Asymptote bei $y = 3$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$. Hoch- oder Tiefpunkte gibt es nicht

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 7

Beispiel für die Untersuchung einer verschobenen Parabel

Untersuche das Schaubild von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte. Gib die Gleichung der ursprünglichen Potenzfunktion an, und durch welche Verschiebung es aus dieser Potenzfunktion hervorgegangen ist.

Lösung:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4 \quad | \text{ kubische Ergänzung mit binomischer Formel}$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 - 4 \quad | \text{ binomische Formel}$$

$$y = (x - 1)^3 - 4 \quad | + 4$$

$$y + 3 = (x - 1)^3 \quad | \text{ verschobene Funktion}$$

$$y + 3 = f(x - 1)$$

$$y = f(x)$$

$$y = x^3 \quad | \text{ ursprüngliche Funktion}$$

Es handelt sich um eine Parabel 3. Grades mit der Gleichung $y = x^3$, die um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = -3$ nach unten verschoben wurde. Sie ist symmetrisch zum Punkt $P(1|-3)$. Sie besitzt weder Hoch- noch Tiefpunkte und auch keine Asymptoten

Beispiel für die Untersuchung einer verschobenen Hyperbel

Untersuche das Schaubild von $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 9}$ auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte. Gib die Gleichung der ursprünglichen Potenzfunktion an, und durch welche Verschiebung es aus dieser Potenzfunktion hervorgegangen ist.

Lösung:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 9} \quad | \text{ binomische Formel}$$

$$y = \frac{x^2 - 6x + 10}{(x - 3)^2} \quad | \text{ quadratische Ergänzung im Zähler}$$

$$y = \frac{x^2 - 6x + 9 - 9 + 10}{(x - 3)^2} \quad | \text{ binomische Formel im Zähler}$$

$$y = \frac{(x - 3)^2 - 9 + 10}{(x - 3)^2} \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$y = \frac{(x - 3)^2 + 1}{(x - 3)^2} \quad | \text{ Bruch auftrennen}$$

$$y = 1 + \frac{1}{(x - 3)^2} \quad | -1$$

$$y - 1 = \frac{1}{(x - 3)^2} \quad | \text{ verschobene Funktion}$$

$$y - 1 = f(x - 3)$$

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{1}{x^2} \quad | \text{ ursprüngliche Funktion}$$

Es handelt sich um eine Hyperbel 2. Grades mit der Gleichung $y = \frac{1}{x^2}$, die um $x_0 = 3$ nach rechts und $y_0 = 1$ nach oben verschoben wurde. Sie ist symmetrisch zur senkrechten Asymptote bei $x = 3$. Außerdem hat sie eine waagrechte Asymptote bei $y = 1$: $f(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \pm \infty$. Sie besitzt weder Hoch- noch Tiefpunkte.

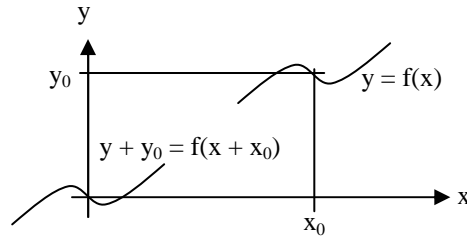
Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 8

4.4.4. Symmetrienachweis durch Verschiebung

Symmetrienachweis durch Verschiebung

Das Schaubild von $y = f(x)$ ist

- **symmetrisch zur Achse $x = x_0$,**
wenn die um $-x_0$ in x -Richtung **zurück verschobene** Funktion $y = f(x + x_0)$ **gerade** ist
- **symmetrisch zum Punkt $P(x_0 | y_0)$,**
wenn die um $-x_0$ in x -Richtung und $-y_0$ in y -Richtung **zurück verschobene** Funktion $y + y_0 = f(x + x_0)$ **ungerade** ist



Beispiel:

Zeige, dass das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ symmetrisch zum Punkt $P(2|1)$ ist.

Lösung

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) && | \text{ ursprüngliche Funktion} \\
 y &= \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 3 && | \text{ x durch x + 2 und y durch y + 1 ersetzen} \\
 y + 1 &= f(x + 2) && | \text{ verschobene Funktion} \\
 y + 1 &= \frac{1}{2}(x + 2)^3 - 3(x + 2)^2 + 6(x + 2) - 3 && | \text{ mit binomischer Formel ausmultiplizieren} \\
 y + 1 &= \frac{1}{2}[1x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3] && | \text{ ausmultiplizieren und nach Potenzen ordnen} \\
 &\quad - 3[1x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 1 \cdot 2^2] \\
 &\quad \quad + 6[x + 2] \\
 &\quad \quad \quad - 3 \\
 y + 1 &= \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 6x + 4 && | \text{ vereinfachen} \\
 &\quad - 3x^2 - 12x - 12 \\
 &\quad \quad + 6x + 12 \\
 &\quad \quad \quad - 3 \\
 y + 1 &= \frac{1}{2}x^3 + 1 && | - 1 \\
 y &= \frac{1}{2}x^3
 \end{aligned}$$

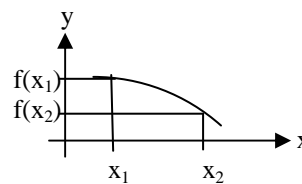
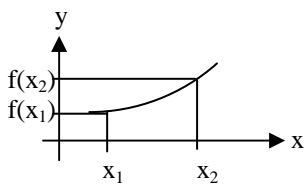
Da die um -2 in x -Richtung und -1 in y -Richtung zurück verschobene Funktion $y + 1 = f(x + 2)$ bzw. $y = \frac{1}{2}x^3$ ungerade und damit symmetrisch zu $O(0|0)$ ist, muss die ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ bzw. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ symmetrisch zu $P(2|1)$ sein.

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 9

4.4.5. Monotonieverhalten

Definition

Das Schaubild der Funktion $y = f(x)$ heißt im Bereich $[a; b] \subset D$
(streng) monoton steigend,
 wenn $f(x_1) \leq (<) f(x_2)$
(streng) monoton fallend,
 wenn $f(x_1) \geq (>) f(x_2)$
 für alle $a \leq x_1 < x_2 \leq b$



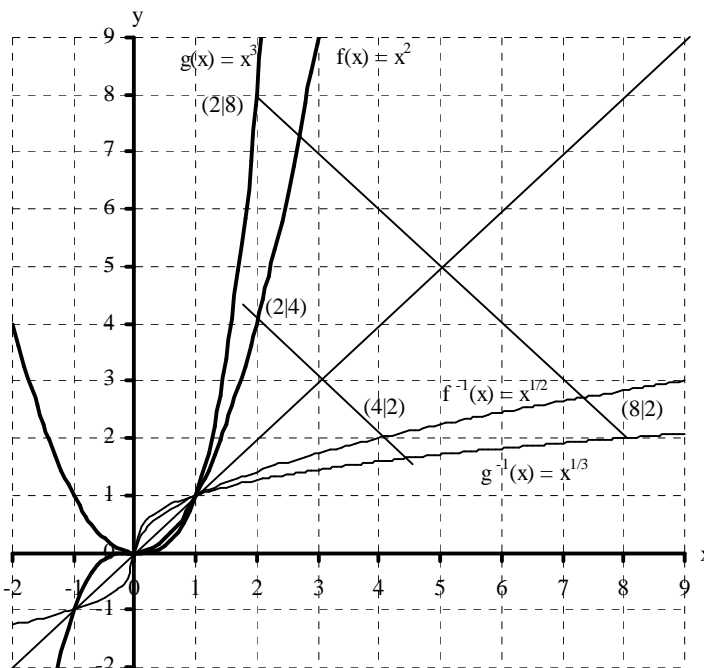
Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 10

4.4.6. Bestimmung von Umkehrfunktionen

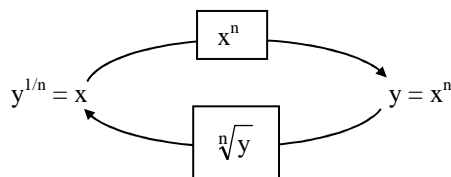
Schaubilder der Wurzel- und Potenzfunktionen für $n = 2$ und 3 (siehe auch 1.4.1.)

$x = \sqrt[2]{y}$	$y = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
3	9

$x = \sqrt[3]{y}$	$y = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
1,5	3,375
2	8



Das Ziehen der n-ten Wurzel ist die **Umkehrung** des Potenzierens mit der Hochzahl n:



Beispiel:

Bestimme die Funktionsgleichung und Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} zu $f(x) = 3(x - 2)^3 + 5$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 y &= 3(x - 2)^3 + 5 && | \text{Vertauschung von } x \text{ und } y \\
 x &= 3(y - 2)^3 + 5 && | - 5 \\
 x - 5 &= 3(y - 2)^3 && | :3 \\
 \frac{1}{3}(x - 5) &= (y - 2)^3 && | \sqrt[3]{} \text{ mit } x \geq 5 \text{ und } y \geq 2 \\
 \sqrt[3]{\frac{1}{3}(x - 5)} &= y - 2 && | +2 \\
 \sqrt[3]{\frac{1}{3}(x - 5)} + 2 &= y = f^{-1}(x) \text{ mit } D_{f^{-1}} = [5; \infty[\text{ und } W_{f^{-1}} = [2; \infty[
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 11