4.5. Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1: Normalform und Verhalten für $x \to \pm\infty$

Bestimme die Normalform der Funktionsgleichung und beschreibe das Verhalten der Schaubilder für $x \to \pm\infty$ (Beispiel: $f(x) = x^3$ kommt von unten und geht nach oben)

a) $f(x) = -x^5 + 6x^2 - 7x + 12$
b) $f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 - 2$
c) $f(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^3 + 2) + 2$
d) $f(x) = (x - 2)^3$
e) $f_t(x) = tx - 4x^2 + 12$ für $t \in \mathbb{R}$
f) $f_t(x) = tx^3 - 2x^2 + 5x - 1$ für $t \in \mathbb{R}$
g) $f_t(x) = x^4 - tx^2 + 6$ für $t \in \mathbb{R}$
h) $f_a(x) = -a(x - 3)\cdot(x + 2)\cdot(3 - x)$ für $a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2: Produktform

Bestimme die Normalform sowie die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen für $t \in \mathbb{R}$ und skizziere ihre Schaubilder für die gegebenen t. Beschreibe **in Worten**, wie sich **Betrag** und **Vorzeichen** von t auf die Form des Schaubildes auswirken.

a) $f(x) = (x + 2)^2\cdot(x - 1)\cdot(x - 3)$
b) $f(x) = (x + 2)^2\cdot(x - 1)$
c) $f(x) = (x + 2)\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)$
d) $f(x) = -(x + 2)\cdot(x + 1)\cdot(x - 2)$
e) $f(x) = (x + 2)^3\cdot(x - 1)$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)\cdot(x - 1)^4$.
g) $f_t(x) = (x + 1)^2\cdot(x - t)$ für $t \in \{-2; -1; 0\}$
h) $f_t(x) = (x + 1)\cdot(x - t)^2$ für $t \in \{-2; -1; 0\}$
i) $f_t(x) = (x - t)^3$ für $t \in \{-2; -1; 0\}$
j) $f_t(x) = tx(x - 2)(x + 2)$ für $t \in \{-1; 1; 2\}$
k) $f_t(x) = x\cdot(x^2 - t)$ für $t \in \{-1; 0; 1; 4\}$
l) $f_t(x) = \frac{x}{t}(x - t)\cdot(x - 2t)$ für $t \in \{-1; 1; 2\}$

Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen in Produktform

Bestimme die Funktionsgleichungen der ganzrationalen Funktionen n-ten Grades, deren Schaubilder die folgenden Nullstellen aufweisen und außerdem durch den Punkt P verlaufen:

a) $n = 1$, $x_1 = 1$ und $P(0|1)$
b) $n = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $P(0|4)$
c) $n = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $P(0|-12)$
d) $n = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ und $P(0|-8)$
e) $n = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 4$ und $P(0|4)$
f) $n = 4$, $x_1 = t$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$ und $P(0|2)$ für $t \in \mathbb{R}$
g) $n = 3$, $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ und $P(0|t)$ für $t \in \mathbb{R}$
h) $n = 3$, $x_{1/2} = 2$, $x_3 = t$ und $P(0|-4)$ für $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4: Polynomdivision

Führe die folgenden Divisionen aus:

a) $(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x + 3)$
b) $(x^3 - 3x^2 + x + 1) : (x - 1)$
c) $(2x^3 + 4x^2 - 4x - 8) : (x + 2)$
d) $(-x^3 + 6x^2 - 11x + 6) : (x - 3)$
e) $(x^5 - 8x^4 - 19x^3 - 10x^2) : (x - 10)$
f) $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$
g) $(x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 12x + 14) : (x - 7)$
h) $(x^3 + 2x^2 - 3x - 6) : (x + 2)$

Aufgabe 5: Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision

Bestimme die Produktform sowie die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen für $t \in \mathbb{R}$ und skizziere ihre Schaubilder für die gegebenen t. Beschreibe **in Worten**, wie sich **Betrag** und **Vorzeichen** von t auf die Form des Schaubildes auswirken.

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
b) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$
c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$
d) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4$
f) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{7}{2}x + 5$
g) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 - x^2 - \frac{2}{5}x - 2$
h) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + x + 12$
i) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - 2x$
j) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x - 2$
k) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x + t$ für $t \in \mathbb{R}$
l) $f_t(x) = x^4 - t^2x^2$ für $t \in \mathbb{R}$
m) $f_t(x) = x^3 + (2 - 2t)x^2 + (t^2 - 4t)x + 2t^2$
n) $f_t(x) = x^3 + x^2 - t^2x - t^2$

Aufgabe 6: Nullstellenbestimmung durch Substitution
Bestimme die Achsenschnittpunkte sowie die Produktform der folgenden Funktionen und skizziere ihre Schaubilder (gegebenenfalls für t = 1)

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
b) $f(x) = 3x^4 - 15x^2 + 18$
c) $f_t(x) = 4tx^4 + 8tx^2 - 12t$ für $t \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = x^5 + x^3 - 2x$
e) $f(x) = x^6 - 9x^3 + 8$
f) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$
g) $f(x) = (x - t)^2 + 3(x - t) + 2$
h) $f(x) = (x^2 + 2t)^4 - 3(x^2 + 2t)^2 + 2$

Aufgabe 7: gemeinsame Punkte
Bestimme alle Achsenschnittpunkte und die gemeinsamen Punkte von f und g. Skizziere die beiden Schaubilder in ein Koordinatensystem mit passend gestauchter y-Achse (z.B. 1 cm = 10 LE oder 1 cm = 2 LE)

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 8$
b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 16x$ und $g(x) = x^3 + 4x + 16$
c) $f(x) = 2x^2 - 3$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x$
d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ und $g(x) = x^2 - 6x + 9$

Aufgabe 8: Nullstellenbestimmung mit dem Intervallhalbierungsverfahren
Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 4x + 1 = x(x^2 - 4) + 1$ mit dem Intervallhalbierungsverfahren auf 2 Nachkommastellen genau und gib alle verwendeten Intervalle in einer Tabelle an.

Aufgabe 9: Symmetrie
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie zum Ursprung und zur y-Achse:

a) $f(x) = 3x$
b) $f(x) = 3x + 2$
c) $f(x) = 3x^2 + 2$
d) $f(x) = 3x^2 + 2x$
e) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
f) $f(x) = 3x^3 + 2x$
g) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$
h) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$
i) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 1$
j) $f(x) = 2x^4 + x^2 + 32$
k) $f(x) = \frac{2x^5 + x^3 + 3x}{3x^3 - 2x^1 + 2}$
l) $f(x) = (3x^5 - 2x^3 + x)\cdot(2x^4 + x^2 + 32)$

Aufgabe 10: Symmetrie
Welche Werte dürfen die Koeffizienten a, b und c annehmen, damit $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) gerade
b) ungerade
c) weder gerade noch ungerade ist?

Aufgabe 11: Symmetrienachweis durch Verschiebung
Überprüfe die Symmetrie der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$ zur Senkrechten x = 1
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ zu $P(1|-1)$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ zu $P(1|2)$
d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$ zu $P(2|1)$
e) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ zu $P(4|3)$
f) $f_t(x) = x^2 - 2tx + t^2$ zur Senkrechten x = t
g) $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{t}x$ zur Senkrechten $x = \frac{1}{t}$ für $t \neq 0$
h) $f_t(x) = x^4 + 4tx^3 - 8t^3x$ zur Senkrechten $x = -t$
i) $f_t(x) = x^3 - 6tx^2 + 12t^2x - 8t^3 - t$ zu $P(2t|-t)$
j) $f_t(x) = x^3 - t^2x + t$ zu $P(0|t)$

Aufgabe 12: Bestimmung von Funktionsgleichungen
Bestimme die Funktionsgleichungen der ganzrationalen Funktionen n-ten Grades, deren Eigenschaften folgendermaßen vorgegeben sind:

a) n = 3, verläuft durch $P_1(-1|0)$, $P_2(0|1)$, $P_3(1|4)$ und $P_4(2|15)$
b) n = 3, verläuft durch $P_1(-3|0)$, $P_2(-2|0)$, $P_3(-1|0)$ und $P_4(0|12)$
c) n = 4, verläuft durch $P_1(-2|0)$, $P_2(0|0)$, $P_3(2|0)$ und $P_4(5|0)$
d) n = 3, punktsymmetrisch zum Ursprung O(0|0), verläuft durch $P_1(1|0)$ und $P_2(2|6)$
e) n = 3, punktsymmetrisch zum Ursprung O(0|0), verläuft durch $P_1(1|-2)$ und $P_2(2|-16)$
f) n = 4, achsensymmetrisch zur y-Achse x = 0, verläuft durch $P_1(0|1)$, $P_2(1|0)$ und $P_3(2|9)$
g) n = 4, achsensymmetrisch zur y-Achse x = 0, verläuft durch $P_1(0|-2)$, $P_2(1|0)$ und $P_3(2|-6)$

4.5. Lösungen zu den Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1: Normalform und Verhalten für x → ± ∞

a) $f(x) = -x^5 + 6x^2 - 7x + 12$
b) $f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 - 2$
c) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2$
d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
e) $f(x) = -4x^2 + tx + 12$ für $t \in \mathbb{R}$
f) $f(x) = tx^3 - 2x^2 + 5x - 1$ für $t \in \mathbb{R}$
g) $f_t(x) = x^4 - tx^2 + 6$ für $t \in \mathbb{R}$
h) $f_t(x) = ax^3 - 4ax^2 - 3ax + 18a$

Aufgabe 2: Produktform

a) $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$
b) $f(x) = x^2 + 3x^2 - 4$
c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
d) $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$
e) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^4 + x^3 - 4x^2 + \frac{7}{2}x - 1$
g) $f_t(x) = x^3 + (2 - t)x^2 + (1 - 2t)x - t$
h) $f_t(x) = x^3 + (1 - 2t)x^2 + (t^2 - 2t)x + t^2$
i) $f_t(x) = x^3 - 3tx^2 + 3t^2x - t^3$
j) $f_t(x) = tx^3 - 4tx$
k) $f_t(x) = x^3 - tx$
l) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 3x^2 + 2tx$

Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen in Produktform

a) $f(x) = -x + 1$
b) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$
c) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{35}{3}x^2 + \frac{50}{3}x - 8$
e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{4}x^3 - 5x + 4$
f) $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 + \frac{1-t}{2t}x^3 - \frac{4+t}{2t}x^2 + \frac{2t-2}{t}x + 2$
g) $f_t(x) = -\frac{t}{8}x^3 + \frac{5t}{8}x^2 - \frac{t}{4}x + t$
h) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - \frac{4+t}{t}x^2 + \frac{4+4t}{t}x - 4$

Aufgabe 4: Polynomdivision

a) $x^2 + x - 2$
b) $x^2 - 2x - 1$
c) $2x^2 - 4$
d) $-x^2 + 3x - 2$
e) $x^4 + 2x^3 + x^2$
f) $x^2 + 2x - 3$
g) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x + 1)\cdot(x^2 - 2)$
h) $x^2 - 3$

Aufgabe 5: Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision

a) $f(x) = (x + 3)(x + 2)(x + 1)$
b) $f(x) = (x + 5)(x + 3)(x - 1)$
c) $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$
d) $f(x) = (x + 3)^2\cdot(x + 1)^2$
e) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^3$
f) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 5)(x - 1)(x + 2)$
g) $f(x) = -\frac{1}{5}(x + 5)(x^2 + 2)$
h) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)(x + 2)(x - 2)(x - 4)$
i) $f(x) = \frac{1}{4}x\cdot(x - 2)^3$
j) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 3)\cdot(x - 2)$
k) $f_t(x) = \frac{1}{t}(x - t)^2$
l) $f_t(x) = x^2(x - t)(x + t)$
m) $f_t(x) = (x - t)^2(x + 2)$
n) $f_t(x) = (x - t)(x + t)(x + 2)$

Aufgabe 6: Nullstellenbestimmung durch Substitution

a) $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$
b) $f(x) = 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
c) $f_t(x) = 4t(x + 1)\cdot(x - 1)(x^2 + 3)$
d) $f(x) = x\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x^2 + 2)$
e) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 - 8) = (x^2 + x + 1)(x - 1)(x^2 + 2x + 4)(x - 2)$
f) $f(x) = (x^3 + 1)(x^3 - 8) = (x - 2)(x^3 + 1)\cdot(x^2 + 2x + 4)$
g) $f(x) = (x - t + 1)(x - t + 2)$
h) $f(x) = (x^2 + 2t - 1)(x^2 + 2t - 2)$
$\Rightarrow S_{1/2}(\pm\sqrt{1-2t}\,|0)$ für $t \neq \frac{1}{2}$ und $S_{3/4}(\pm\sqrt{2-2t}\,|0)$ für $t \neq 1$

Aufgabe 7: gemeinsame Punkte

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x = x(x + 2)^2$ und $g(x) = -(x - 4)(x + 2)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x + 2)(x - 1) \Rightarrow S_1(1|9)$, $S_2(-2|0)$ und $S_3(-4|-16)$

b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 16x = -x(x - 8)(x + 2)$ und $g(x) = x^3 + 4x + 16 = (x^2 - 2x + 8)(x + 2)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = -2x^3 + 6x^2 + 12x - 16 = -2(x + 2)(x - 1)(x - 4) \Rightarrow S_1(-2|0)$, $S_2(1|21)$ und $S_3(4|96)$

c) $f(x) = 2x^2 - 3 = 2(x - \sqrt{\frac{3}{2}})(x + \sqrt{\frac{3}{2}})$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x^2 + 1)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)(x - 3) \Rightarrow S_1(-1|-1)$, $S_2(2|5)$ und $S_3(3|15)$

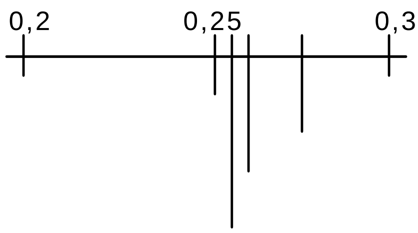
d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x = \frac{1}{3}x(x - 3)^2$ und $g(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = \frac{1}{3}(x - 3)^3 \Rightarrow S_1(3|0)$ (Berührpunkt)

Aufgabe 8: Nullstellenbestimmung mit dem Intervallhalbierungsverfahren

Intervall 2:

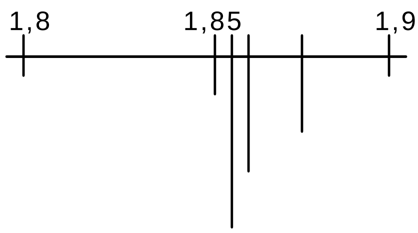
x_l	$m = \frac{x_r + x_l}{2}$	x_r	VZW in	
			$[x_l;m]$	$[m;x_r]$
0,2	**0,25**	0,3		**x**
0,25	0,275	0,3	x	
0,25	0,2625	0,275	x	
0,25	0,25625	0,2625	x	
0,25	**0,253125**	0,25625		**x**
0,253125	0,2546875	0,25625	x	
0,253125		0,254875		



Ergebnis: $x_2 \approx 0,25$

Intervall 3:

x_l	$m = \frac{x_r + x_l}{2}$	x_r	VZW in	
			$[x_l;m]$	$[m;x_r]$
1,8	**1,85**	1,9		**x**
1,85	1,875	1,9	x	
1,85	1,8625	1,875	x	
1,85	**1,85625**	1,8625		**x**
1,85625	**1,859375**	1,8625		**x**
1,859375	1,8609375	1,8625	x	
1,859375		1,8609375		



Ergebnis: $x_3 \approx 1,86$

Aufgabe 11: Symmetrienachweis durch Verschiebung

a) $f(x + 1) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $f(x + 1) + 1 = x^3 - 2x$

c) $f(x + 1) - 2 = x^3$

d) $f(x + 2) - 1 = x^3$

e) $f(x + 4) - 3 = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

f) $f_t(x + t) = x^2$

g) $f_t(x + \frac{1}{t}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2t^2}$

h) $f_t(x - t) = x^4 - 6t^2x^2 + 5t^4$

i) $f_t(x + 2t) + t = x^3$

j) $f_t(x) - t = x^3 - t^2x$

Aufgabe 12: Bestimmung von Funktionsgleichungen

a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 2\cdot(x + 3)\cdot(x + 2)\cdot(x + 1) = 2x^3 + 12x^2 + 22x + 12$

c) $f(x) = a\cdot(x - 5)\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)\cdot x = a\cdot(x - 5)\cdot(x^3 - 4x) = ax^4 - 5ax^3 - 4ax^2 + 20ax$ mit $a \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = (x + 1)\cdot x\cdot(x - 1) = x^3 - x$

e) $f(x) = -2x^3$

f) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

g) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 2$