4.5. Prüfungsaufgaben zu Achsenschnittpunkten

Aufgabe 1a (30)

Untersuche die Funktionen

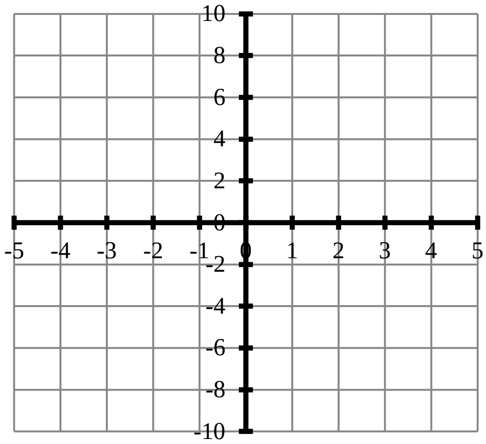
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 - 3$

b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 4x$

c) $h(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$

auf

- globalen Verlauf,
- Symmetrie,
- Achsenschnittpunkte und
- skizziere jeweils ihre Graphen in das Koordinatensystem rechts.

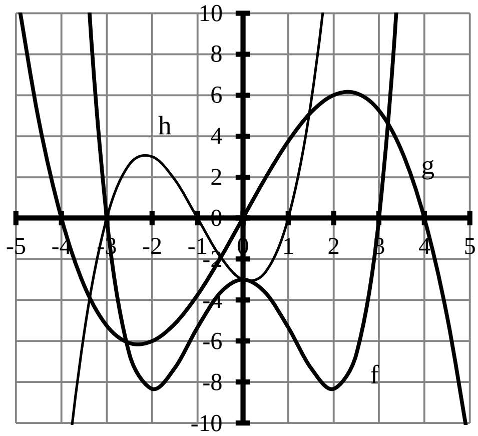


Lösungen (30)

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 - 3 = \frac{1}{3}(x^2 - 9)(x^2 + 1) \Rightarrow S_y(0|-3)$ und $S_{x1/2}(\pm 3|0)$, (4)
   kommt von oben und geht nach oben, da Grad n = 4 gerade und Koeffizient $a_4 = \frac{1}{3} > 0$ (2)
   Symmetrie zur y-Achse, da alle Exponenten gerade sind. (2)
   Graph (2)

b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 4x = -\frac{1}{4}x(x^2 - 16) \Rightarrow S_y(0|0)$ und $S_{x1/2}(\pm 4|0)$ (4)
   kommt von oben und geht nach unten, da Grad n = 3 ungerade und Koeffizient $a_3 = -\frac{1}{4} < 0$ (2)
   Punktsymmetrie zum Ursprung, da alle Exponenten ungerade sind. (2)
   Graph (2)

c) $h(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1) = x^3 + 3x^2 - x - 3 \Rightarrow S_y(0|-3)$ und $S_{x1/2}(\pm 1|0)$ sowie $S_{x3}(-3|0)$ (4)
   kommt von unten und geht nach oben, da Grad n = 3 ungerade und Koeffizient $a_3 = 1 > 0$ (2)
   Keine Symmetrie zu y-Achse oder Ursprung, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auftreten. (2)
   Graph (2)



Aufgabe 1b (30)

Untersuche die Funktionen

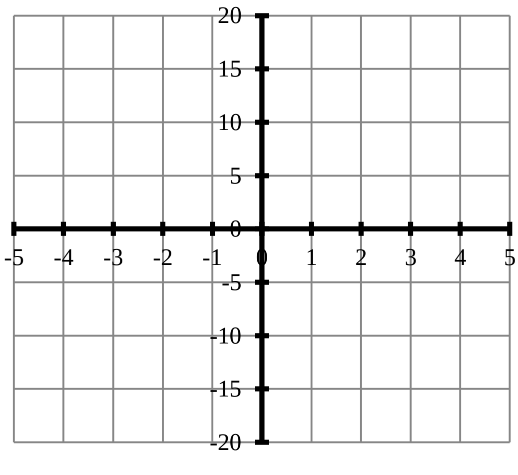
a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{15}{4}x^2 + 4$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$

c) $h(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 3)$

auf

- globalen Verlauf,
- Symmetrie,
- Achsenschnittpunkte und
- skizziere jeweils ihre Graphen in das Koordinatensystem auf der rechten Seite



Lösungen (30)

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{15}{4}x^2 + 4 = -\frac{1}{4}(x^2 - 16)(x^2 + 1) \Rightarrow S_y(0|4)$ und $S_{x1/2}(\pm 4|0)$, (4)

kommt von unten und geht nach unten, da Grad n = 4 gerade und Koeffizient $a_4 = -\frac{1}{4} < 0$ (2)

Symmetrie zur y-Achse, da alle Exponenten gerade sind. (2)

Graph (2)

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x = \frac{1}{3}x(x^2 - 9) \Rightarrow S_y(0|0)$ und $S_{x1/2}(\pm 3|0)$ (4)

kommt von unten und geht nach oben, da Grad n = 3 ungerade und Koeffizient $a_3 = \frac{1}{3} > 0$ (2)

Punktsymmetrie zum Ursprung, da alle Exponenten ungerade sind. (2)

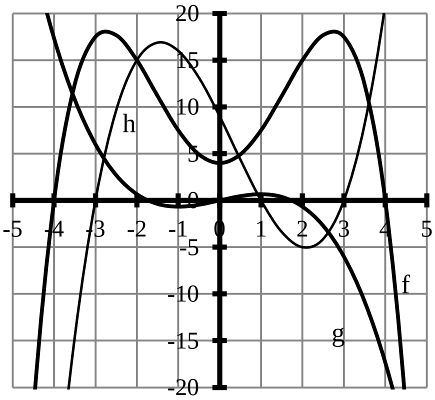
Graph (2)

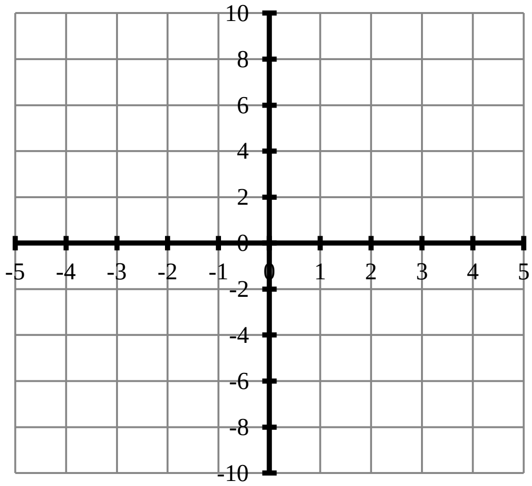
c) $h(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 3) = (x - 1)(x^2 - 9) = x^3 - x^2 - 9x + 1 \Rightarrow \Rightarrow S_y(0|1)$ und $S_{x1/2}(\pm 3|0)$ sowie $S_{x3}(1|0)$ (4)

kommt von unten und geht nach oben, da Grad n = 3 ungerade und Koeffizient $a_3 = 1 > 0$ (2)

Keine Symmetrie zu y-Achse oder Ursprung, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auftreten. (2)

Graph (2)





Aufgabe 1c (30)

Untersuche die Funktionen

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2$

b) $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

c) $h(x) = (x - 1)(x + 1)^2(x + 3)$

auf

- globalen Verlauf,
- Symmetrie,
- Achsenschnittpunkte und
- skizziere jeweils ihre Graphen.

Lösungen (30)

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)(x^2 - 4) \Rightarrow S_y(0|2)$ $S_{x1/2}(\pm 1|0)$ und $S_{x1/2}(\pm 2|0)$, (4)

kommt von unten und geht nach unten, da Grad n = 4 gerade und Koeffizient $a_4 = -\frac{1}{2} < 0$ (2)

Symmetrie zur y-Achse, da alle Exponenten gerade sind. (2)

Graph (2)

b) $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 = -\frac{1}{3}x^2(x - 3) \Rightarrow S_y(0|0)$ (doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt) und $S_x(3|0)$ (4)

kommt von oben und geht nach unten, da Grad n = 3 ungerade und Koeffizient $a_3 = -\frac{1}{3} < 0$ (2)

Keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Koeffizienten vertreten sind. . (2)

Graph (2)

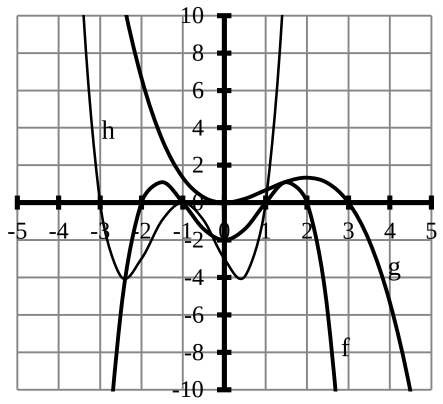
c) $h(x) = (x - 1)(x + 1)^2(x + 3) = x^4 + \ldots - 3$

$\Rightarrow S_y(0|-3)$ und $S_{x1}(-1|0)$; $S_{x2}(1|0)$ (doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt) und $S_{x3}(-3|0)$ (4)

kommt von oben und geht nach oben, da Grad n = 4 gerade und Koeffizient $a_4 = 1 > 0$ (2)

Keine Symmetrie zu y-Achse oder Ursprung, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten auftreten. (2)

Graph (2)



Aufgabe 2a (24)
Bestimme die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3x + 4$ (2)
b) $g(x) = x^2 – x – 2$ (3)
c) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$ (4)
d) $i(x) = \frac{1}{4}x^4 − \frac{1}{2}x^2 – 2$ (4)
e) $j(x) = (x – 1)(x + 1)(x – 5)$ (4)
f) $k(x) = (x – 1)^2(x + 1)(x – 5)$ (4)
g) $l(x) = (x^2 + 1)(x^2 – 1)$ (3)

Lösungen

a) $f(x) = 3x + 4 = 3(x + \frac{4}{3}) \Rightarrow S_y(0|4)$ und $S_x(-\frac{4}{3}|0)$ (2)
b) $g(x) = x^2 – x – 2 = (x + 2)(x – 1) \Rightarrow S_y(0|-2)$, $S_{x1}(-2|0)$ und $S_{x2}(1|0)$ (3)
c) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = \frac{1}{2}(x + 2)(x + 4) \Rightarrow S_y(0|4)$, $S_{x1}(-2|0)$ und $S_{x2}(-4|0)$ (4)
d) $i(x) = \frac{1}{4}x^4 − \frac{1}{2}x^2 – 2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2)(x^2 – 4) \Rightarrow S_y(0|-2)$, $S_{x1}(-2|0)$ und $S_{x2}(2|0)$ (4)
e) $j(x) = (x – 1)(x + 1)(x – 5) \Rightarrow S_y(0|5)$, $S_{x1}(-1|0)$, $S_{x2}(1|0)$ und $S_{x3}(5|0)$ (4)
f) $k(x) = (x – 1)^2(x + 1)(x – 5) \Rightarrow S_y(0|-5)$, $S_{x1}(-1|0)$, $S_{x2}(1|0)$ und $S_{x3}(5|0)$ (4)
g) $l(x) = (x^2 + 1)(x^2 – 1) \Rightarrow S_y(0|-1)$, $S_{x1}(-1|0)$, $S_{x2}(1|0)$ (3)

Aufgabe 2b (20)
Bestimme die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 5x − 8$ (2)
b) $g(x) = x^2 + 11x + 30$ (3)
c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 − \frac{4}{3}x + 1$ (4)
d) $i(x) = x^4 − 25x^2 + 114$ (4)
e) $j(x) = (x – 30)(x + 20)(x – 10)$ (3)
f) $k(x) = x^3 – 4x^2$ (2)

Lösungen (20)

a) $f(x) = 5x – 8 \Rightarrow S_y(0|-8)$ und $S_x(\frac{8}{5}|0)$ (2)
b) $g(x) = x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6) \Rightarrow S_y(0|30)$, $S_{x1}(-5|0)$ und $S_{x2}(-6|0)$ (3)
c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 − \frac{4}{3}x + 1 = \frac{1}{3}(x^2 – 4x + 3) = \frac{1}{3}(x – 1)(x – 3) \Rightarrow S_y(0|1)$, $S_{x1}(1|0)$ und $S_{x2}(3|0)$ (4)
d) $i(x) = x^4 − 25x^2 + 144 = (x^2 − 9)(x^2 − 16) = (x – 4)(x + 4)(x – 5)(x + 5) \Rightarrow S_y(0|144)$, $S_{x1/2}(\pm 4|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 5|0)$ (5)
e) $j(x) = (x – 30)(x + 20)(x – 10) \Rightarrow S_y(0|6000)$, $S_{x1}(10|0)$, $S_{x2}(-20|0)$ und $S_{x3}(30|0)$ (4)
f) $k(x) = x^3 – 4x^2 = x^2(x – 4) \Rightarrow S_y(0|0)$ (doppelt $\Rightarrow$ Berührpunkt) und $S_x(4|0)$ (2)

Aufgabe 3: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 3. Grades (8)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 13x - 12$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 12$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8$

d) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 50x - 50$

e) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

Lösungen

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x - 1)\cdot(x + 1))\cdot(x - 4)$ mit $S_y(0|4)$, $S_{x1}(1|0)$, $S_{x2}(-1|0)$ und $S_{x3}(4|0)$

b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x - 1)\cdot(x + 1))\cdot(x + 4)$ mit $S_y(0|-4)$, $S_{x1}(1|0)$, $S_{x2}(-1|0)$ und $S_{x3}(-4|0)$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6 = (x - 1)\cdot(x + 1))\cdot(x - 6)$ mit $S_y(0|6)$, $S_{x1}(1|0)$, $S_{x2}(-1|0)$ und $S_{x3}(6|0)$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 6 = (x - 1)\cdot(x + 1))\cdot(x + 6)$ mit $S_y(0|-6)$, $S_{x1}(1|0)$, $S_{x2}(-1|0)$ und $S_{x3}(-6|0)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 13x - 12 = \frac{1}{2}(x - 4)\cdot(x - 3)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|-12)$, $S_{x1}(2|0)$, $S_{x2}(3|0)$ und $S_{x3}(4|0)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 12 = \frac{1}{2}(x - 4)\cdot(x + 3)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|12)$, $S_{x1}(2|0)$, $S_{x2}(-3|0)$ und $S_{x3}(4|0)$

g) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8 = \frac{1}{3}(x + 4)\cdot(x - 3)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|8)$, $S_{x1}(2|0)$, $S_{x2}(3|0)$ und $S_{x3}(-4|0)$

h) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 50x - 50 = 2\cdot(x + 1)\cdot(x - 5)\cdot(x + 5)$ mit $S_y(0|-50)$, $S_{x1/2}(\pm 5|0)$ und $S_{x3}(-1|0)$

i) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = -(x + 1)(x + 2)(x + 3) \Rightarrow S_y(0|6)$, $S_{x1}(1|0)$, $S_{x2}(2|0)$ und $S_{x3}(3|0)$

Aufgabe 4: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades (8)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 - x - \frac{3}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

c) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8$

d) $f(x) = 2(x^2 + 2x - 3)\cdot(x^2 - 3x + 2)$

e) $f(x) = x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 10x^2$

Lösungen

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)\cdot(x + 1)\cdot(x^2 + 1)$ mit $S_y(0|-\frac{3}{2})$, $S_{x1}(3|0)$ und $S_{x2}(-1|0)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2}\cdot(x^2 + x + 2)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|2)$, $S_{x1}(1|0)$ und $S_{x2}(2|0)$

c) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8 = 2\cdot(x^2 + x + 2)\cdot(x - 1)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|8)$, $S_{x1}(1|0)$ und $S_{x2}(2|0)$

d) $f(x) = 2(x^2 + 2x - 3)\cdot(x^2 - 3x + 2) = 2(x + 3)(x - 1)(x - 1)(x - 2) \Rightarrow S_{x1}(-3|0)$, $S_{x2}(1|0)$ (doppelt), $S_{x3}(2|0)$

e) $f(x) = x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 10x^2 = x^2(x - 1)(x - 2)(x - 5) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$ (doppelt), $S_{x1}(1|0)$, $S_{x2}(2|0)$, $S_{x3}(5|0)$

Aufgabe 5: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades mit Symmetrie (8)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2$

b) $f(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8$

c) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5x^2 + \frac{144}{5}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$

e) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 4$

f) $f(x) = -x^4 + 3x + 4$

Lösungen

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2 = \frac{1}{2}\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|2)$, $S_{x1/2}(\pm 1|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 2|0)$

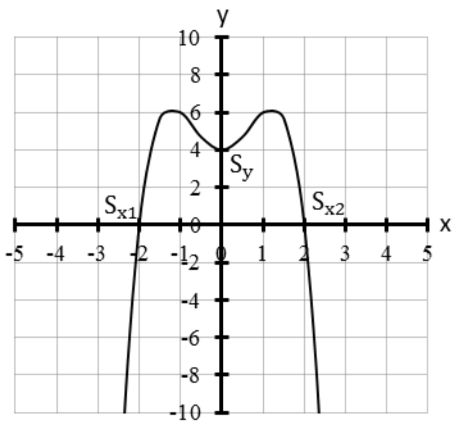
b) $f(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8 = 2\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x - 2)$ mit $S_y(0|8)$, $S_{x1/2}(\pm 1|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 2|0)$

c) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5x^2 + \frac{144}{5} = \frac{1}{5}(x - 3)\cdot(x + 3)\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$ mit $S_y(0|\frac{144}{5})$, $S_{x1/2}(\pm 3|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 4|0)$.

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3 = \frac{1}{2}(x^2 + 3)\cdot(x - \sqrt{2})\cdot(x - \sqrt{2})$ mit $S_y0|-3)$ und $S_{x1/2}(\pm\sqrt{2}|0)$

e) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 4 = 2(x^2 - 2)(x^2 - 1) \Rightarrow S_{x1/2}(\pm 1|0)$ und $S_{x3/4}(\pm\sqrt{2}|0)$

f) $f(x) = -x^4 + 3x + 4 = -(x^2 - 4)(x^2 + 1) \Rightarrow S_y0|4)$ und $S_{x1/2}(\pm 2|0)$
Skizze siehe rechts



Aufgabe 6: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades mit Symmetrie und Parametern (8)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a) $f_t(x) = -2x^3 - 2t^2x$ für $t \in \{1; 2; 3\}$

b) $f_t(x) = 3x^3 - 6tx^2 + 3t^2x$ für $t \in \{1; 2; 3\}$

c) $f_t(x) = -2x^3 + 8t^2x$ für $t \in \{1; 2; 3\}$

Lösungen

a) $f_t(x) = -2x^3 - 2t^2x = -2x(x^2 - t^2) = -2x(x - t)(x + t) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$, $S_{x1/2t}(\pm t|0)$

b) $f_t(x) = 3x^3 - 6tx^2 + 3t^2x = 3x(x - t)^2 \Rightarrow S_{x1}(0|0)$, $S_{x1/2t}(t|0)$ (doppelt)

c) $f_t(x) = -2x^3 + 8t^2x = -2x\cdot(x^2 - 4t^2) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$, $S_{x2}(-4|0)$ und $S_{x3/4t}(\pm 2t|0)$

Aufgabe 7: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades mit Symmetrie und Parametern (8)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}t^2x^2 - x^2 + t^2$ für $t \in \{1; 2; 3\}$

b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{9}t^2x^2 - x^2 + t^2$ für $t \in \{1; 2; 3\}$

c) $f_t(x) = x^4 - t^2x^2$ für $t \in \{1; 2; 3\}$

Lösungen

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

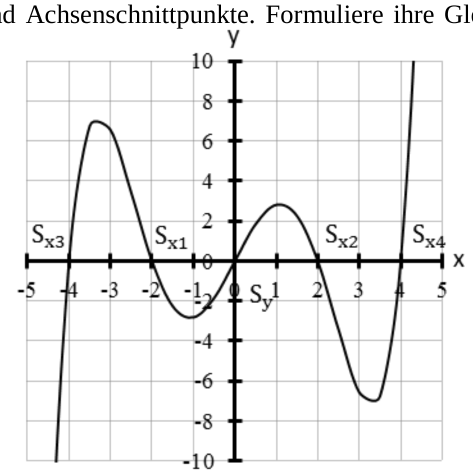
a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}t^2x^2 - x^2 + t^2 = \frac{1}{4}(x - t)\cdot(x + t)\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)$ mit $S_y(0|t^2)$, $S_{x1/2}(\pm t|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 2|0)$.

b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{9}t^2x^2 - x^2 + t^2 = \frac{1}{9}\cdot(x - t)\cdot(x + t)\cdot(x - 3)\cdot(x + 3)$ mit $S_y(0|t^2)$, $S_{x1/2}(\pm t|0)$ und $S_{x3/4}(\pm 3|0)$.

c) $f_t(x) = x^4 - t^2x^2 = x^2\cdot(x + t)\cdot(x - t) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$ (doppelt) und $S_{x1/2t}(\pm t|0)$

Aufgabe 8: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 5. Grades mit Symmetrie (8)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{16}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + 4x$ auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihr Schaubild.



Lösung:

$f(x) = \frac{1}{16}x(x^2 - 4)(x^2 - 16) = \frac{1}{16}x(x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$

Punktsymmetrie zum Ursprung, da nur ungerade Exponenten (1)

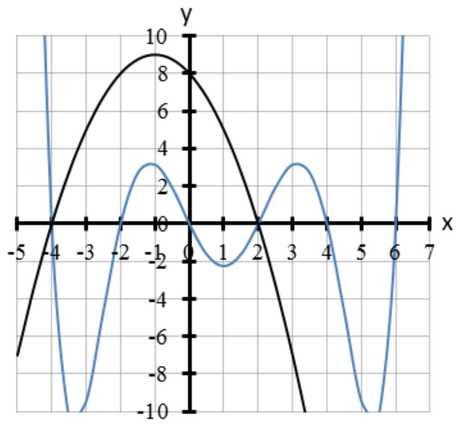
x = 0 einsetzen $\Rightarrow S_y(0|0)$ (1)

y = 0 setzen $\Rightarrow S_{x1/2}(\pm 2|0)$ uns $S_{x3/4}(\pm 4|0)$ (1)

Beschriftete Skizze (2)

Aufgabe 9a: Ungleichung in Produktform (6)

Lösen Sie die folgende Ungleichung graphisch: $0{,}01x(x^2 - 4)(x^2 - 16)(x - 6) < -(x - 2)(x + 4)$.



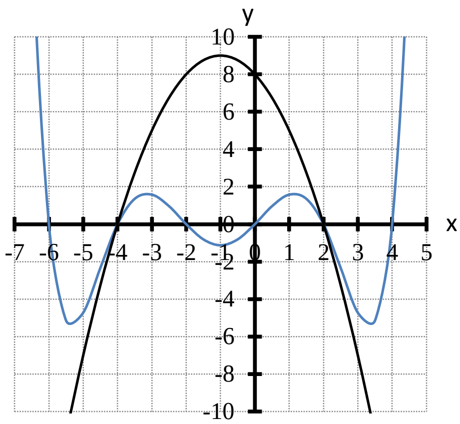
Lösungen

Skizzen (3) + (1)

L =] –4;2[(2)

Aufgabe 9b: Ungleichung in Produktform (6)

Lösen Sie die folgende Ungleichung graphisch: $0{,}005x(x^2 - 4)(x^2 - 16)(x + 6) < -(x - 2)(x + 4)$.



Lösungen

Skizzen (3) + (1)

L =] –4;2[(2)