4.5. Prüfungsaufgaben zu Symmetrie und Verschiebung

Aufgabe 1: Symmetrie (6)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Punkt- oder Achsensymmetrie:
a) $f(x) = 6x^6 + 2x^4 + 8x^2 + 7$
b) $f(x) = -8x^5 - 5x^3 + 5x - 3$
c) $f(x) = (ax^5 - bx^3 + cx)\cdot(ax^6 + bx^4 + cx^2 + d)$

Aufgabe 2: Symmetrie (6)
Untersuche die folgenden Funktionen auf Punkt- oder Achsensymmetrie:
a) $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d + \frac{e}{x^2}$
b) $f(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^4 + 3)$
c) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^4 - 6x^2 - 2}$

Aufgabe 3: Symmetrie und Verschiebung mit gemeinsamen Punkten (4)
Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ und $g(x) = -x - 3$
a) Zeige, dass das Schaubild von f symmetrisch zum Punkt $P(-1|2)$ ist (1)
b) Berechne die Nullstelle von f auf zwei Nachkommastellen genau. (1)
c) Berechne die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von f und g auf zwei Nachkommastellen genau. (2)

Lösung
a) $f(x - 1) - 2 = x^3 - x$ (1)
b) $x_0 \approx 2,521$ (1)
c) $S_{fg}(2,587|0,413)$ (2)

Aufgabe 4: Symmetrie und Verschiebung mit gemeinsamen Punkten (4)
Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = -x + 3$
a) Zeige, dass das Schaubild von f symmetrisch zum Punkt $P(1|-2)$ ist (1)
b) Berechne die Nullstelle von f auf zwei Nachkommastellen genau. (1)
c) Berechne die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von f und g auf zwei Nachkommastellen genau. (2)

Lösung
a) $f(x + 1) + 2 = x^3 - x$ (1)
b) $x_0 \approx -2,521$ (1)
c) $S_{fg}(-2,587|-0,413)$ (2)

Aufgabe 5: Symmetrie und Achsenschnittpunkte mit Parametern
Gegeben sei die Funktion $g_t(x) = -x^4 + t^2x^2$ für $t \in \mathbb{R}$.
a) Bestimme die Achsenschnittpunkte und stelle g_t als vollständig aufgespaltenes Produkt dar. (4)
b) Beschreibe die Symmetrie und den Verlauf für $x \to \pm\infty$ der Schaubilder von g_t. (2)
c) Skizziere den Verlauf von g_1, g_2 und g_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem. (3)

Lösung
$f_t(x) = -x^2\cdot(x + t)\cdot(x - t)$, Symmetrie zur y-Achse mit $S(0|0)$ (doppelte Nullstelle), $S_{x1}(t|0)$ und $S_{x2}(-t|0)$

Aufgabe 6: Symmetrie und Achsenschnittpunkte mit Parametern
Gegeben sei die Funktion $g_t(x) = x^3 - t^2x$ für $t \in \mathbb{R}$.
a) Bestimme die Achsenschnittpunkte und stelle g_t als vollständig aufgespaltenes Produkt dar.
b) Beschreibe die Symmetrie und den Verlauf für $x \to \pm\infty$ der Schaubilder von g_t.
c) Skizziere den Verlauf von g_1, g_2 und g_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-4 \le x \le 4$ und 1 LE = 1 cm.

Lösung

$f_t(x) = -x\cdot(x + t)\cdot(x - t)$, Symmetrie zum Ursprung mit $S(0|0)$, $S_{x1}(t|0)$ und $S_{x2}(-t|0)$

Aufgabe 7: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern

Gegeben sei die Funktion $f_t(x) = (x + 1)^3 - t^2(x + 1) + 2$ für $t \varepsilon \mathbb{R}$.

a) Durch welche Verschiebung geht das Schaubild von f_t aus dem Schaubild von g_t hervor?
b) Beschreibe die Symmetrie und den Verlauf für $x \to \pm \infty$ der Schaubilder von f_t.
c) Zeige die Symmetrie zum Punkt $P(-1|2)$ durch eine geeignete Rückverschiebung.
d) Skizziere den Verlauf von f_1 in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.
e) Bestimme die Normalform $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der Funktion f_t.

Lösung

c) $f_t(x - 1) = -x^4 + t^2x^2$

e) $f_t(x) = -x^4 - 4tx^3 - 5t^2x^2 - 4t^3x + 2t^2x - t^4 + t^2$

Aufgabe 8: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Zeige durch eine geeignete Verschiebung die Symmetrie des Schaubildes der Funktion $f_t(x) = x^2 + 4tx + 3t^2$ zur Senkrechten $x = -2t$. (2)

Lösung

Die um $+2t$ in x-Richtung verschobene Funktion $f_t(x - 2t) = x^2 - t$ ist symmetrisch zur y-Achse $x = 0$, also ist die Originalfunktion $f_t(x)$ symmetrisch zu $x = -2t$. (3)

Aufgabe 9: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Zeige durch eine geeignete Verschiebung die Symmetrie des Schaubildes der Funktion $f_t(x) = x^3 + 3tx^2 + t^2x$ zum Punkt $P(-t|t^3)$. (3)

Lösung:

Die um $+ t$ in x-Richtung und $-t^3$ in y-Richtung verschobene Funktion $f_t(x - t) - t^3 = x^3 - 2t^2x$ ist symmetrisch zum Ursprung $O(0|0)$, also ist die Originalfunktion $f_t(x)$ symmetrisch zu $P(-t|t^3)$. (3)

Aufgabe 10: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Untersuche durch geeignete Verschiebung, ob das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2 - \frac{x}{t}$ zur Senkrechten $x = \frac{1}{2t}$ symmetrisch ist. (3)

Lösung:

Die um $-\frac{1}{2t}$ in x-Richtung verschobene Funktion $f_t(x + \frac{1}{2t}) = x^2 - \frac{1}{4t^2}$ ist symmetrisch zur y-Achse $x = 0$, also ist die Originalfunktion $f_t(x)$ symmetrisch zu $x = \frac{1}{2t}$. (3)

Aufgabe 11: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Untersuche durch geeignete Verschiebung, ob das Schaubild der Funktion $f(x) = 2x^2 + \frac{x}{t}$ zur Senkrechten $x = -\frac{1}{4t}$ symmetrisch ist. (2)

Lösung:

Die um $+\frac{1}{4t}$ in x-Richtung verschobene Funktion $f_t(x - \frac{1}{4t}) = 2x^2 - \frac{1}{8t^2}$ ist symmetrisch zur y-Achse $x = 0$, also ist die Originalfunktion $f_t(x)$ symmetrisch zu $x = -\frac{1}{4t}$. (3)

Aufgabe 12: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Untersuche durch geeignete Verschiebung, ob das Schaubild der Funktion $f_t(x) = 27x^3 + \frac{27x^2}{t} + \frac{9x}{t^2}$ zum Punkt $P(-\frac{1}{3t}|-\frac{1}{t^3})$ symmetrisch ist. (3)

Lösung:

Die um $+\frac{1}{3t}$ in x-Richtung und $+\frac{1}{t^3}$ in y-Richtung verschobene Funktion $f_t(x - \frac{1}{3t}) + \frac{1}{t^3} = 27x^3$ ist symmetrisch zum Ursprung, also ist die Originalfunktion $f_t(x)$ symmetrisch zu $P(-\frac{1}{3t}|-\frac{1}{t^3})$. (3)

Aufgabe 13: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Untersuche durch geeignete Verschiebung, ob das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{t} + \frac{x}{t^2} + \frac{2}{3t^3}$ zum Punkt $P(\frac{1}{t}|\frac{1}{t^3})$ symmetrisch ist. (3)

Lösung:

Die um $-\frac{1}{t}$ in x-Richtung und $-\frac{1}{t^3}$ in y-Richtung verschobene Funktion $f_t(x + \frac{1}{t}) - \frac{1}{t^3} = \frac{x^3}{3}$ ist symmetrisch zum Ursprung, also ist die Originalfunktion $f_t(x)$ symmetrisch zu $P(-\frac{1}{3t}|-\frac{1}{t^3})$. (3)

Aufgabe 14: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (3)

Gegeben sei die Funktion $h_t(x) = \frac{x^2}{2t^2}(x - 3t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Achsenschnittpunkte und und beschreibe den Verlauf der Schaubilder für $x \to \pm\infty$.

b) Zeige durch eine geeignete Rückverschiebung, daß die Schaubilder von h_t symmetrisch zum Punkt $P(t \mid -t)$ sind.

c) Zeichne die Symmetriezentren $P(t|-t)$ für $t = \frac{1}{3}$, 1 und 2 in ein Koordinatensystem mit $-1 \leq x \leq 7$ und $-5 \leq y \leq 1$ sowie 1 LE = 1 cm.

d) Skizziere den Verlauf von h_t für $t = \frac{1}{3}$, 1 und 2 unter Verwendung der Symmetriezentren und der Achsenschnittpunkte in das Koordinatensystem aus c).

e) Stelle h_t in der Normalform dar.

Aufgabe 15: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (10)

Gegeben sei die Funktion $f_t(x) = -(x - t)^3 + t$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeige durch eine geeignete Verschiebung, dass die Funktion f_t symmetrisch zum Punkt $P_t(t|t)$ ist. (2)

b) Zeichne die Schaubilder von f_{-1}, f_0 und f_1 in das Koordinatensystem aus b). (3)

c) Zeichne die Symmetriezentren $P_t(t|t)$ für $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ und 3 in ein Koordinatensystem mit $-3 \leq x \leq 3$ und $-9 \leq y \leq 9$. (2)

d) Wenn man **alle** möglichen Symmetriezentren $P_t(t|t)$ in das Koordinatensystem einzeichnet, ergibt sich eine Gerade. Gib die Funktionsgleichung dieser Geraden an. (2)

e) Bestimme die Normalform $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der Funktion f_t. (1)

Lösung

a) $f_t(x+t) - t = -x^3$

d) $y = x$

e) $f_t(x) = -x^3 + 3tx^2 - 3t^2x + t^3 + t$

Aufgabe 16: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (10)

Gegeben sei die Funktion $f_t(x) = \frac{1}{3}(x - t)^3 - \frac{1}{3}t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeige durch eine geeignete Verschiebung, dass die Funktion f_t symmetrisch zum Punkt $P_t(t|-\frac{1}{3}t)$ ist. (2)

b) Zeichne die Schaubilder von f_{-1}, f_0 und f_1 das Koordinatensystem aus b) ein. (3)

c) Zeichne die Symmetriezentren $P_t(t|-\frac{1}{3}t)$ für $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ und 3 in ein Koordinatensystem mit $-3 \leq x \leq 3$ und $-5 \leq y \leq 5$. (2)

d) Wenn man **alle** möglichen Symmetriezentren $P_t(t|-\frac{1}{3}t)$ in das Koordinatensystem einzeichnet, ergibt sich eine Gerade. Gib die Funktionsgleichung dieser Geraden an. (2)

e) Bestimme die Normalform $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der Funktion f_t. (1)

Lösung

a) $f_t(x + t) + t^3 = \frac{1}{3}x^3$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

e) $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2x - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t$

Aufgabe 17: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (10)

Gegeben sind die Funktion $f_t(x) = -\frac{1}{2}(x - 2t)^3 + t$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeige durch eine geeignete Verschiebung, daß die Funktion f_t symmetrisch zum Punkt $P_t(2t|t)$ ist. (2)

b) Zeichne die Schaubilder von $f_{-0,5}$, f_0 und $f_{0,5}$ in das Koordinatensystem aus b). (3)

c) Zeichne die Symmetriezentren $P_t(2t|t)$ für $t = -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1$ und $1{,}5$ in ein Koordinatensystem mit $-3 \leq x \leq 3$ und $-5 \leq y \leq 5$. (2)

d) Wenn man **alle** möglichen Symmetriezentren $P_t(2t|t)$ in das Koordinatensystem einzeichnet, ergibt sich eine Gerade. Gib die Funktionsgleichung dieser Geraden an. (2)

e) Bestimme die Normalform $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der Funktion f_t. (1)

Lösung

a) $f_t(x + 2t) - t = -\frac{1}{2}x^3$

d) $y = \frac{1}{2}x$

e) $f_t(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + 4t^3 + t$

Aufgabe 18: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern

Gegeben sind die Funktion $f_t(x) = (x - 1)^4 \; -t^2(x - 1)^2$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Durch welche Verschiebung geht das Schaubild von f_t aus dem Schaubild von g_t hervor? (1)

b) Beschreibe die Symmetrie und den Verlauf für $x \to \pm\infty$ der Schaubilder von f_t. (2)

c) Zeige die Symmetrie durch eine geeignete Rückverschiebung. (1)

d) Zeichne ein Schaubild von f_2 in ein Koordinatensystem mit $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$ und 1 LE = 1 cm. (2)

e) Bestimme die Normalform $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der Funktion f_t. (2)

Lösung

c) $f_t(x + t) = x^4 - t^2x^2$

e) $f_t(x) = x^4 - 4tx^3 + 5t^2x^2 - 4t^3x + 2t^2x + t^4 - t^2$

Aufgabe 19: Symmetrie und Verschiebung mit Parametern (8)

Gegeben sei die Funktion $f_t(x) = -(x + 1)^4 + t^2(x + 1)^2$ für $t \varepsilon \mathbb{R}$.

a) Durch welche Verschiebung geht das Schaubild von f_t aus dem Schaubild von g_t hervor? (1)

b) Beschreibe die Symmetrie und den Verlauf für $x \to \pm \infty$ der Schaubilder von f_t. (2)

c) Zeige die Symmetrie durch eine geeignete Rückverschiebung. (1)

d) Zeichne das Schaubild von f_2 in ein Koordinatensystem mit $-4 \leq x \leq 2$, $-5 \leq y \leq 5$ und 1 LE = 1 cm. (2)

e) Bestimme die Normalform $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ der Funktion f_t. (2)