4.5. Ganzrationale Funktionen

Definition

Eine Funktion der Gestalt $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit **reellen Koeffizienten** $a_n, a_{n-1}, ...$ und $a_n \neq 0$ heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grades in Normalform**. Ihr Schaubild ist eine **Parabel n-ter Ordnung.** Ganzrationale Funktionen 1. bzw. 2. Grades heißen auch **lineare** bzw. **quadratische Funktionen.**

4.5.1. Verlauf der Schaubilder für $x \to \pm\infty$

Einführung: Beispiele zu ganzrationalen Funktionen: Betrachtung des Verlaufs für $x \to \pm\infty$

Satz über den Verlauf der Schaubilder ganzrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

Grad n ist	$a_n > 0$	$a_n < 0$
gerade	kommt von oben und geht nach oben	kommt von unten und geht nach unten
ungerade	kommt von unten und geht nach oben	kommt von oben und geht nach unten

Beweis: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Klammerausdruck gegen 1 und der Gesamtausdruck daher gegen $a_n x^n \cdot 1 = a_n x^n$.

Übungen: Aufgaben zu ganzrationale Funktionen Aufgabe 1

4.5.2. Vorzeichenwechsel und Gebietseinteilung

Einführung: Beispiele zu ganzrationalen Funktionen: Betrachtung der Nullstellen

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

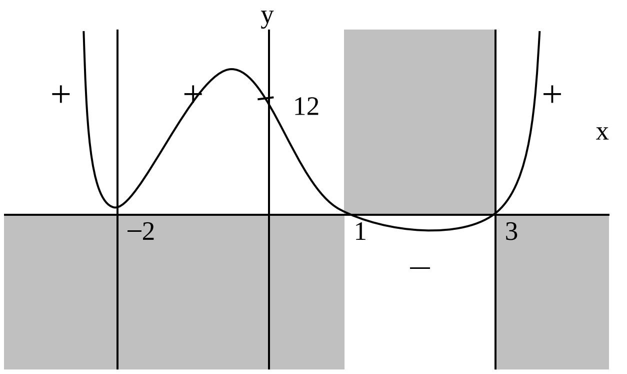
Nullstellen von Produktfunktionen

Das Produkt $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist. Jede Nullstelle der Faktoren g(x) und h(x) ist also auch eine Nullstelle der Produktfunktion f(x)

Beispiel: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen: Nr. 2 a)

Schaubildskizze von $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ mit Gebietseinteilung

	−2	1	3	
(x + 2)	−	+	+	+
(x + 2)	−	+	+	+
(x − 1)	−	−	+	+
(x − 3)	−	−	−	+
$(x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$	+	+	−	+



Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 2 Rest

Vorzeichenwechsel bei Nullstellen

$\left\{\begin{matrix}\text{einfache, dreifache, u.s.w.}\\\text{zweifache, vierfache, u.s.w.}\end{matrix}\right\}$ Nullstellen bedeuten $\left\{\begin{matrix}\text{Schnittpunkte mit Vorzeichenwechsel}\\\text{Berührpunkte ohne Vorzeichenwechsel}\end{matrix}\right\}$.

Beispiel: Bestimmung einer Funktionsgleichung aus gegebenen Nullstellen und einem weiteren Punkt

Bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades mit den Nullstellen −1, 3 und 5, die außerdem durch $P(-2|4)$ geht.

Lösung

y	$= f(x)$	| Ansatz in Produktform mit Nullstellen x_1, x_2, x_3 und Formfaktor a
y	$= a\cdot(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$	| Nullstellen einsetzen
y	$= a\cdot(x+1)(x-3)(x-5)$	| $P(-2|4)$ einsetzen
4	$= a\cdot(-2+1)(-2-3)(-2-5)$	| ausmultiplizieren
4	$= a\cdot(-35)$	| $:(-35)$
$-\frac{4}{35}$	$= a$	| einsetzen
y	$= -\frac{4}{35}(x+1)(x-3)(x-5)$	| Gleichung in Produktform ausmultiplizieren
y	$= -\frac{4}{35}[x^3-7x^2+7x+8]$	| weiter ausmultiplizieren
y	$= -\frac{4}{35}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{32}{35}$	| Gleichung in Normalform

⇒ Die Funktion hat die Gleichung $y = -\frac{4}{35}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{32}{35}$

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 3

4.5.3. Nullstellenbestimmung durch Zerlegung in Linearfaktoren mit Polynomdivision

Fundamentalsatz der Algebra

- Jede ganzrationale Funktion lässt sich als Produkt linearer und quadratischer Funktionen darstellen: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = a_n(x+u_1)\cdot(x+u_2)\cdot...\cdot(x^2+p_1x+q_1)\cdot(x^2+p_2x+q_2)\cdot....$
- Durch Ausmultiplizieren sieht man, dass $a_n\cdot u_1\cdot u_2\cdot...\cdot q_1\cdot q_2\cdot... = a_0$ sein muss. Insbesondere sind die Nullstellen $x_1 = -u_1$, $x_2 = -u_2$, ... allesamt Teiler des y-Achsenabschnittes a_0.
- Gibt es k lineare Faktoren und l quadratische Faktoren, so ist k + 2l = n. Insbesondere kann eine ganzrationale Funktion n-ten Grades höchstens n Nullstellen besitzen

Beweis

Benötigt komplexe Zahlen als Hilfsmittel und kann hier nicht dargestellt werden.

Beispiel:

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

1. Schritt

Erraten einer ersten Nullstelle. Alle Nullstellen müssen Teiler des y-Achsenabschnittes $a_0 = 4$ sein. ⇒ Kandidatenliste ±1, ±2, ±4. Einsetzen ergibt z.B. $f(1) = 18 \neq 0$ und $f(-1) = 0$ ⇒ erste Nullstelle $x_1 = -1$

2. Schritt

Abspalten eines **Linearfaktors** $(x - x_1) = (x + 1)$ durch **Polynomdivision**. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muss sich f(x) als Produkt aus einem **Linearfaktor** $(x - x_1) = (x + 1)$ und einem unbekannten Restfaktor $(x^2 + px + q)$ darstellen lassen:

$$f(x) \quad = \quad x^3 + 5x^2 + 8x + 4 \quad = \quad (x+1)\cdot(x^2+px+q)$$

Um den Restfaktor zu bestimmen, teilt man beide Seiten durch den Linearfaktor

$$\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x+1} \quad = \quad x^2+px+q$$

Man erhält den Restfaktor also durch **Polynomdivision** von $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ durch $x + 1$:

Einführung: schriftliche Division (= Polynomdivision für **festes** x = 10):

$$\begin{array}{rrrrcrrcrrr}
10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 & & 10^1 & 10^0 & & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\
1 & 5 & 8 & 4 & : & 1 & 1 & = & 1 & 4 & 4 \\
-1 & 1 & & & & & & & & & \\ \cline{1-3}
 & 4 & & & & & & & & & \\
 & -4 & 4 & & & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & & & & & & & & \\
 & & -4 & 4 & & & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & & & & & &
\end{array}$$

Ergebnis: $1584 = 11 \cdot 144$

Übertragung: Polynomdivision für **beliebiges** x:

$$\begin{array}{llllclcllll}
(x^3 & +5x^2 & +8x & +\ 4) & : & (x & +1) & = & x^2 & +\ 4x & +\ 4 \\
-(x^3 & +\ x^2) & & & & & & & & & \\ \cline{1-3}
 & 4x^2 & & & & & & & & & \\
 & -(4x^2 & +\ 4x) & & & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & & & & & & & & \\
 & & -(4x & +\ 4) & & & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & & & & & &
\end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$
$= (x + 1)\cdot(x^2 + 4x + 4)$

3. Schritt:
Bestimmung der Nullstellen des **Restfaktors** $(x^2 + 4x - 4)$ mit der p-q-Formel $\Rightarrow x_{2/3} = -2$

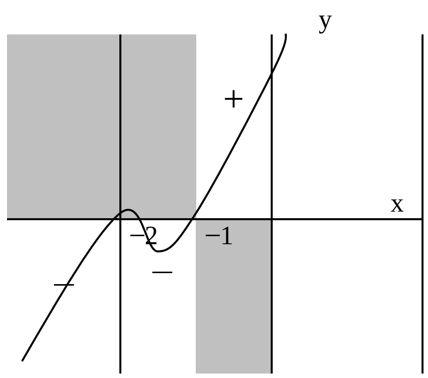
Ergebnis: $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$
$= (x + 1)\cdot(x^2 + 4x + 4)$
$= (x + 1)\cdot(x + 2)\cdot(x + 2)$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $x_1 = -1$ (enfache NST mit VZW $\Rightarrow$ **Schnittpunkt**)
$x_{2/3} = -2$ (doppelte NST ohne VZW $\Rightarrow$ **Berührpunkt**)

Gebietseinteilung und Schaubildskizze:

-2 $\quad -1$ $\quad\quad 2$

x + 2	−	+	+
x + 2	−	+	+
x + 1	−	−	+
$(x + 2)^2\cdot(x + 1)$	−	−	+



Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Aufgaben 4 und 5

Bestimmung der ganzzahligen Nullstellen einer ganzrationalen Funktion
1. Erraten einer Nullstelle x_1. (x_1 muss ein Teiler des absoluten Gliedes a_0 sein.)
2. Abspalten des Linearfaktors $(x - x_1)$ durch Polynomdivision.
3. Untersuchung des Restfaktors gemäß 1. und 2. oder mit p-q-Formel

Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion
Höchstzahl:
Da eine ganzrationale Funktion n-ten Grades höchstens in n Linearfaktoren aufgespalten werden kann, können auch nur höchstens n Nullstellen vorliegen.
Mindestzahl:
0 für gerades n (das Schaubild kann vollständig oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verlaufen)
1 für ungerades n (das Schaubild muss an mindestens einer Stelle die x-Achse passieren)

4.5.4. Nullstellenbestimmung durch Substitution und p-q-Formel

Beispiel
Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

Lösung

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ | **Substitution** (Ersetzung) $u = x^2$

$u^2 - 5u + 6 = 0$ | **p-q-Formel**

$\Rightarrow$ $u_1 = 2$ und $u_2 = 3$ |**Rücksubstitution**

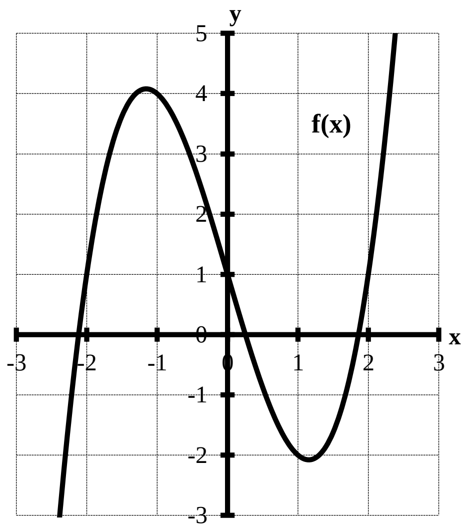
$\Rightarrow$ $x_1^2 = 2 \Rightarrow x_{1/3} = \pm\sqrt{2}$ und

$x_2^2 = 3 \Rightarrow x_{2/4} = \pm\sqrt{3}$.

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 6 und 7

4.5.5. Nullstellenbestimmung mit dem Intervallhalbierungsverfahren

Beispiel: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 8 Bestimmung von x_1



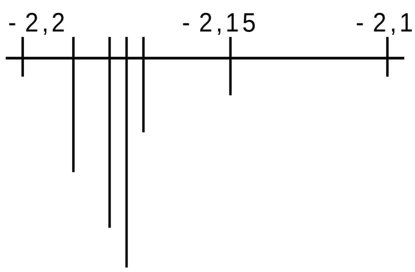
1. Schritt (siehe auch 4.2.1.)
Mittels einer **Wertetabelle** und einer groben Skizze werden die **Intervalle** bestimmt, in denen ein **Vorzeichenwechsel** stattfindet.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−20	1	4	1	−2	1	16

2. Schritt
Die Intervalle werden fortlaufend halbiert, wobei das neue (halbierte) Intervall so gewählt wird, dass es den **Vorzeichenwechsel** enthält. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich die auf die zweite Nachkommastelle gerundeten beiden Intervallgrenzen nicht mehr unterscheiden.

Intervall 1:

x_l	$m = \frac{x_r + x_l}{2}$	x_r	VZW in $[x_l;m]$	VZW in $[m;x_r]$
−2,2	**−2,15**	−2,1		**x**
−2,15	**−2,125**	−2,1		**x**
−2,125	−2,1125	−2,1	x	
−2,125	−2,11875	−2,1125	x	
−2,125	**−2,12187**	−2,11875		**x**
−2,12187		−2,11875		



Ergebnis: $x_1 \approx -2{,}12$

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 8 Bestimmung von x_2 und x_3

4.5.6. Symmetrienachweis durch Verschiebung

Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung (siehe auch 4.4.1.)

Satz über Symmetrie von Summen symmetrischer Funktionen
Sind $f(x)$ und $g(x)$ gerade bzw. ungerade Funktionen, so ist auch ihre Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ gerade bzw. ungerade.
Beweis:
$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x)$.
Satz über Symmetrie ganzrationaler Funktionen
Eine ganzrationale Funktion f ist $\begin{pmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{pmatrix}$, falls ihr Funktionsterm nur $\begin{pmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{pmatrix}$ Exponenten enthält.
Beweis:
Ganzrationale Funktionen lassen sich als Summen von Potenzfunktionen betrachten. Potenzfunktionen mit geraden bzw. ungeraden Exponenten sind gerade bzw. ungerade.

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 9 - 10

Symmetrie zu verschobenen Punkten und Achsen (siehe auch 4.4.4.)

Beispiel: Nachweis einer Punktsymmetrie durch Verschiebung
Zeige, dass das Schaubild von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ symmetrisch zum Punkt $P(1|2)$ ist
Lösung:

y	$= f(x)$	| ursprüngliche Funktion
y	$= x^3 - 3x^2 + 4$	| x durch x + 1 und y durch y + 2 ersetzen
$y + 2$	$= f(x + 1)$	| einsetzen
y	$= (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4 - 2$	| ausmultiplizieren mit binomischer Formel
y	$= x^3 - 3x$.	

Da die Gleichung nur noch ungerade Exponenten enthält, ist die verschobene Funktion $y + 2 = f(x + 1)$ bzw. $y = x^3 - 3x$ punktsymmetrisch zu $O(0|0)$ Die ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ bzw. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ muss daher punktsymmetrisch zu $P(1|2)$ sein.

Beispiel: Nachweis einer Achsensymmetrie durch Verschiebung
Zeige, dass das Schaubild von $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$ symmetrisch zur Senkrechten $x = 1$ ist.
Lösung:

y	$= f(x)$	| ursprüngliche Funktion
y	$= x^3 - 3x^2 + 4$	| x durch x + 1 ersetzen
y	$= f(x + 1)$	| einsetzen
y	$= (x + 1)^4 - 4(x + 1)^3 + (x + 1)^2 + 6(x + 1) - 4$	| ausmultiplizieren mit binomischer Formel
y	$= x^4 - 5x^2$.	

Da ihre Gleichung nur noch gerade Exponenten enthält, ist die verschobene Funktion $y = f(x + 1)$ bzw. $y = x^4 - 5x^2$ achsensymmetrisch zur y-Achse $x = 0$. Die ursprüngliche Funktion $y = f(x)$ bzw. $y = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$. muss daher achsensymmetrisch zur Senkrechten $x = 1$ sein.

Bemerkung:
Die Verschiebung eines **achsensymmetrischen** Schaubildes in **vertikaler** Richtung hat keinen Einfluss auf die Symmetrie!

Nachweis der Symmetrie bei verschobenen Funktionen (siehe 4.4.4.)

1. Um zu zeigen, dass das Schaubild von f(x) symmetrisch zur Senkrechten $x = x_0$ ist, verschiebt man das Schaubild um $-x_0$ in x-Richtung, indem man x durch $x + x_0$ ersetzt. Das Schaubild der verschobenen Funktion muss dann achsensymmetrisch zur y-Achse x = 0 sein.
2. Um zu zeigen, dass das Schaubild von f(x) symmetrisch zum Punkt $P(x_0|y_0)$ ist, verschiebt man das Schaubild um $-x_0$ in x-Richtung und $-y_0$ in y-Richtung, indem man x durch $x + x_0$ und y durch $y + y_0$ ersetzt. Das Schaubild der verschobenen Funktion muss dann punktsymmetrisch zum Ursprung O(0|0) sein.

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 11

4.5.7. Bestimmung von Funktionsgleichungen (siehe auch 4.2.10.)

Beispiel:
bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur y-Achse ist und durch die Punkte $P_1(1|1)$, $P_2(2|-1)$ und $P_3(3|3)$ geht.
Lösung:

$y = f(x)$ | Ansatz in Normalform als gerade Funktion 4. Grades

$y = ax^4 + bx^2 + c$ | P_1, P_2 und P_3 einsetzen und LGS mit Diagonalverfahren lösen

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & + & b & + & c & = & 1 & \cdot(-16) \quad \cdot(-81) \\
P_2 & 16a & + & 4b & + & c & = & -1 & + \\
P_3 & 81a & + & 9b & + & c & = & 3 & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & + & b & + & c & = & 1 & \\
P_2 & & - & 12b & - & 15c & = & -17 & \cdot(-6) \\
P_3 & & - & 72b & - & 80c & = & -78 & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & + & b & + & c & = & 1 & \cdot 10 \ + \\
P_2 & & - & 12b & - & 15c & = & -17 & + \\
P_3 & & & & - & 10c & = & 24 & \cdot(-1{,}5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & 10a & + & 10b & & & = & 34 & \cdot 6 \ + \\
P_2 & & - & 12b & & & = & -53 & \cdot 5 \\
P_3 & & & & - & 10c & = & 24 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & 60a & & & & & = & -61 & : 60 \\
P_2 & & - & 12b & & & = & -53 & : (-12) \\
P_3 & & & & - & 10c & = & 24 & : (-10)
\end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = -\frac{61}{60}x^4 + \frac{53}{12}x^2 - \frac{12}{5}$.

Probe: durch **Einsetzen** der Punkte

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 12