

## 4.6. Aufgaben zu rationalen Funktionen

### Aufgabe 1: Rationale Funktionen

Formuliere jeweils ein Beispiel für eine

- ganzrationale Funktion 0. Grades
- ganzrationale Funktion 1. Grades
- ganzrationale Funktion 5. Grades
- rationale Funktion mit Nennergrad 2
- gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad 1
- echt gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad 2

### Aufgabe 2: Asymptoten und Grenzwerte

Untersuche die folgenden Funktionen auf Asymptoten und Grenzwerte:

- |                               |                                    |                      |                         |
|-------------------------------|------------------------------------|----------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$     | d) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + 2$  | g) $f(x) = 2^x$      | j) $f(x) = \log_2(x)$   |
| b) $f(x) = \frac{1}{x+4} + 3$ | e) $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2} - 1$  | h) $f(x) = 2^{-x}$   | k) $f(x) = \log_2(-x)$  |
| c) $f(x) = \frac{3}{x+1} - 2$ | f) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + 1$ | i) $f(x) = 2^{-x^2}$ | l) $f(x) = \log_2(x^2)$ |

### Aufgabe 3: Nullstellen im Nenner

Untersuche die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie Vorzeichenwechsel und skizziere ihren Verlauf.

- |                                   |                               |                                    |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ | b) $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$ | c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$ | d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ |
|-----------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|

### Aufgabe 4: Nullstellen im Zähler

Untersuche die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie Vorzeichenwechsel und skizziere ihren Verlauf.

- |                                 |                                    |                                 |                                 |
|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$ | b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 9}$ | c) $f(x) = \frac{x-4}{x^2 + 2}$ | d) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$ |
|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|

### Aufgabe 5: Nullstellen im Zähler und im Nenner

Untersuche die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten, hebbare Lücken sowie Vorzeichenwechsel und skizziere ihren Verlauf.

- |                                 |                                       |   |                                     |
|---------------------------------|---------------------------------------|---|-------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$ | b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ | c) $f(x) = \frac{x-1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ | d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ |
|---------------------------------|---------------------------------------|---|-------------------------------------|

### Aufgabe 6: Polynomdivision mit Rest

Spalte die gebrochenrationale Funktion f auf in einen ganzrationalen Hauptteil und einen echt gebrochenrationalen Rest:

- |   |   |
|---|---|
| a) $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x-1}$              | e) $f(x) = \frac{-x^5 + 7x^4 - x^2 + 8}{x^3 + x^2 + 1}$ |
| b) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 8}{x+2}$          | f) $f(x) = \frac{6x^4 + 5x^2 - 7}{x^3 - 2}$             |
| c) $f(x) = \frac{2x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x}{4x+4}$          | g) $f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x - 5}{2x^2 - 3}$ |
| d) $f(x) = \frac{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ | h) $f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x - 5}{x^3}$      |

### Aufgabe 7: waagrechte Asymptoten

Untersuche die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, hebbare Lücken sowie Asymptoten und skizziere ihren Verlauf mit allen Asymptoten:

a)  $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$       b)  $f(x) = \frac{4-x}{x+1}$       c)  $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$       d)  $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{x^2+4x+3}$

### Aufgabe 8: schiefe Asymptoten

Untersuche die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, hebbare Lücken sowie Asymptoten und skizziere ihren Verlauf mit allen Asymptoten:

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$       b)  $f(x) = \frac{-x^2+1}{x+2}$       c)  $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-2}$       d)  $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+2x+1}$

### Aufgabe 9: Näherungskurven

Untersuche die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, hebbare Lücken sowie Näherungskurven und skizziere ihren Verlauf mit allen Asymptoten und Näherungskurven:

a)  $f(x) = \frac{x^4+1}{4x}$       b)  $f(x) = \frac{-x^4+4}{2x^2}$       c)  $f(x) = \frac{x^4-3x^2-4}{3x^2}$       d)  $f(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{2x^2+2}$

### Aufgabe 10: Funktionenschar

Untersuche die folgenden Funktionen in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und skizziere ihren Verlauf für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ .

a)  $f_t(x) = \frac{1}{x-t}$       c)  $f_t(x) = \frac{1}{x^2-t}$       e)  $f_t(x) = \frac{x^2+2tx+t^2}{tx-t^2}$   
b)  $f_t(x) = \frac{x-t}{x}$       d)  $f_t(x) = \frac{x+t}{x^2-2tx+t^2}$       f)  $f_t(x) = \frac{x^2-t^2+1}{x-t}$

### Aufgabe 11: Bestimmung von Funktionsgleichungen

Gib die Gleichung einer möglichst einfachen rationalen Funktion an, deren Schaubild:

- eine Nullstelle bei  $x = 1$  und eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei  $x = 3$  besitzt
- eine Nullstelle bei  $x = 1$  und eine senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel bei  $x = 3$  besitzt
- eine Nullstelle bei  $x = 0$  und zwei senkrechte Asymptoten mit Vorzeichenwechsel bei  $x = -1$  und  $x = 1$  besitzt
- die  $x$ -Achse bei  $x = -1$  und die  $y$ -Achse bei  $y = 1$  schneidet sowie eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei  $x = -4$  besitzt.
- eine waagrechte Asymptote bei  $y = 2$ , eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei  $x = 1$  und eine Nullstelle bei  $x = -5$  besitzt
- eine schiefe Asymptote mit der Gleichung  $y = x + 1$  und eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei  $x = -2$  besitzt
- eine schiefe Asymptote mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ , eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei  $x = 1$  und eine Nullstelle bei  $x = 3$  besitzt.
- eine Näherungskurve mit der Gleichung  $y = x^2 - 1$  und zwei senkrechte Asymptoten ohne Vorzeichenwechsel bei  $x = -1$  und  $x = 1$  besitzt

### Aufgabe 12: Symmetrie

Untersuche das Schaubild mit Hilfe des GTR auf Symmetrie und belege deine Vermutung rechnerisch:

a)  $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$       e)  $f(x) = (x-3)^2+4$       i)  $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}+2$       m)  $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$   
b)  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$       f)  $f(x) = x^2-8x+14$       j)  $f(x) = -\frac{x^2+4x}{x^2+4x+4}$       n)  $f(x) = \frac{3x-5}{2x-2}$   
c)  $f(x) = \frac{x^3-x}{x^3+x}$       g)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7$       k)  $f(x) = -\frac{5}{x^2-4x+5}$       o)  $f(x) = \frac{4x^2-8x+7}{2x^2-4x+2}$   
d)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$       h)  $f(x) = \frac{1}{2^{2-x}+2^{x-2}}$       l)  $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+4}$       p)  $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

## 4.6. Lösungen zu den Aufgaben zu rationalen Funktionen

### Aufgabe 1: Rationale Funktionen

Beispiele: a)  $f(x) = 2$ ; b)  $f(x) = 3x - 5$ ; c)  $f(x) = -2x^5 + x^3$ ; d)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2}$ ; e)  $f(x) = \frac{x-1}{3x-4}$ ; f)  $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^3+1}$

### Aufgabe 2: Asymptoten und Grenzwerte

- a) senkrechte Asymptote bei  $x = 1$  und waagrechte Asymptote bei  $y = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$
- b) senkrechte Asymptote bei  $x = -4$  und waagrechte Asymptote bei  $y = 3$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$
- c) senkrechte Asymptote bei  $x = -1$  und waagrechte Asymptote bei  $y = -2$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$
- d) senkrechte Asymptote bei  $x = -2$  und waagrechte Asymptote bei  $y = 2$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$
- e) senkrechte Asymptote bei  $x = 4$  und waagrechte Asymptote bei  $y = -1$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$
- f) senkrechte Asymptote bei  $x = -1$  und waagrechte Asymptote bei  $y = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$
- g) waagrechte Asymptote bei  $y = 0$  nur für  $x \rightarrow -\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- h) waagrechte Asymptote bei  $y = 0$  nur für  $x \rightarrow +\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- i) waagrechte Asymptote bei  $y = 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$
- j) senkrechte Asymptote bei  $x = 0$
- k) senkrechte Asymptote bei  $x = 0$
- l) senkrechte Asymptote bei  $x = 0$

### Aufgabe 3: Nullstellen im Nenner

- a)  $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ ,  $S_y(0 | -\frac{1}{2})$ , senkrechte A. mit VZW bei  $x = -1$  und  $2$ , waagrechte A.  $y = 0$
- b)  $f(x) = -\frac{1}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ,  $S_y(0 | \frac{1}{4})$ , senkrechte A. mit VZW bei  $x = \pm 2$ , waagrechte A.  $y = 0$
- c)  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  $S_y(0 | \frac{1}{4})$ , senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = -2$ , waagrechte Asymptote  $y = 0$
- d)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ ,  $S_y(0 | 1)$ , waagrechte Asymptote  $y = 0$

### Aufgabe 4: Nullstellen im Zähler

- a)  $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ,  $S_y(0 | -\frac{1}{4})$ ,  $S_x(-1 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = \pm 2$ , waagrechte Asymptote  $y = 0$
- b)  $f(x) = \frac{x}{(x-3)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,  $S_x(0 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = 3$ , waagrechte A.  $y = 0$
- c)  $f(x) = \frac{x-4}{x^2+2} \Rightarrow D = \mathbb{R}$ ,  $S_y(0 | -2)$  mit VZW,  $S_x(4 | 0)$  mit VZW, waagrechte Asymptote  $y = 0$
- d)  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  $S(0 | 0)$  ohne VZW, senkrechte A. mit VZW  $x = 1$ , waagrechte A.  $y = 0$

### Aufgabe 5: Nullstellen im Zähler und im Nenner

- a)  $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ,  $S_y(0 | -1)$ , hebbare Lücke  $L(-1 | -\frac{1}{2})$ , senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = 1$ , waagrechte Asymptote  $y = 0$ .
- b)  $f(x) = \frac{x}{x(x-2)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ , hebbare Lücke  $L(0 | \frac{1}{4})$ , senkrechte A. ohne VZW bei  $x = 2$ , waagrechte A.  $y = 0$ .
- c)  $f(x) = \frac{x-1}{(x^2+1)(x-1)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $S_y(0 | 1)$ , hebbare Lücke  $L(1 | \frac{1}{2})$ , waagrechte Asymptote  $y = 0$
- d)  $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $S_y(0 | 1)$ ,  $S_x(-1 | 0)$  mit VZW, hebbare Lücke  $L(1 | \frac{2}{3})$ , waagrechte A.  $y = 0$ .

**Aufgabe 6: Polynomdivision mit Rest**

a)  $f(x) = x^2 + 7x + 18 + \frac{24}{x-1}$

e)  $f(x) = -x^2 + 8x - 8 + \frac{8x^2 - 8x + 16}{x^3 + x^2 + 1}$

b)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 15 + \frac{38}{x+2}$

f)  $f(x) = 6x + \frac{5x^2 + 12x - 7}{x^3 - 2}$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{7}{4x+4}$

g)  $f(x) = 2x^2 + x - 1 + \frac{4x-8}{2x^3-3}$

d)  $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{x-1}{x^2+1}$

h)  $f(x) = 4x + 2 + \frac{8x^2 + x - 5}{x^3}$

**Aufgabe 7: waagrechte Asymptoten**

a)  $f(x) = \frac{2(x-2)}{x+3} = 2 - \frac{10}{x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, S_y(0 | -\frac{4}{3}), S_x(2 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = -3$ , waagrechte Asymptote  $y = 2$

b)  $f(x) = \frac{-(x-4)}{x+1} = -1 + \frac{5}{x+1} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, S_y(0 | 4), S_x(4 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = -1$ , waagrechte Asymptote  $y = -1$

c)  $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2} = 1 + \frac{8x}{x^2-4x+4} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, S_y(0 | -1), S_x(-2 | 0)$  ohne VZW, senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = 2$ , waagrechte Asymptote  $y = 1$

d)  $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = 2 - \frac{12x+4}{x^2+4x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -3\}, S_y(0 | \frac{2}{3}), S_x(1 | 0)$  ohne VZW, senkrechte Asymptoten mit VZW bei  $x = -1$  und  $x = -3$ , waagrechte Asymptote  $y = 2$

**Aufgabe 8: schiefe Asymptoten**

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x-3} = x + 3 + \frac{9}{x-3} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3\}, S_x(0 | 0)$  ohne VZW, senkrechte Asymptote mit VZW  $x = 3$ , schiefe Asymptote  $y = x + 3$ .

b)  $f(x) = \frac{-(x-1)(x+1)}{x+2} = -x + 2 - \frac{3}{x+2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, S_y(0 | \frac{1}{2}), S_{x_1}(-1 | 0)$  und  $S_{x_2}(1 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = -2$ , schiefe Asymptote  $y = -x + 2$

c)  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{4}{2x-2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, S_y(0 | \frac{3}{2}), S_{x_1}(-1 | 0)$  und  $S_{x_2}(3 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = 1$ , schiefe Asymptote  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

d)  $f(x) = \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2} = x - 4 + \frac{8x+4}{x^2+2x+1} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, S(0 | 0), S_{x_2}(1 | 0)$  ohne VZW, senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = -1$ , schiefe Asymptote  $y = x - 4$

**Aufgabe 9: Näherungskurven**

a)  $f(x) = \frac{x^4+1}{4x} = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4x} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = 0$ , Näherungskurve  $y = \frac{1}{4}x^3$ .

b)  $f(x) = -\frac{1}{2} \frac{(x^2+2) \cdot (x^2-2)}{x} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, S_x(\pm\sqrt{2} | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = 0$ , Näherungskurve  $y = -\frac{1}{2}x^2$

c)  $f(x) = \frac{(x^2+1)(x^2-4)}{3x^2} = \frac{1}{3}x^2 - 1 - \frac{4}{3x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, S_x(\pm 2 | 0)$  mit VZW, senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = 0$ , Näherungskurve  $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$

d)  $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}x^2 - 3 + \frac{5}{x^2+1} \Rightarrow D = \mathbb{R}, S_{x_1/2}(\pm 1 | 0)$  und  $S_{x_3/4}(\pm 1 | 0)$  mit VZW, Näherungskurve  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

### Aufgabe 10: Funktionenschar

- a)  $f_t(x) = \frac{1}{x-t} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|-\frac{1}{t})$ , senkrechter Asymptote mit VZW bei  $x = t$  und waagrechter Asymptote  $y = 0$
- b)  $f_t(x) = 1 - \frac{t}{x} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $S_x(t|0)$  mit VZW, senkrechter Asymptote mit VZW bei  $x = 0$  und waagrechter Asymptote  $y = 1$
- c)  $f_t(x) = \frac{1}{(x-\sqrt{t}) \cdot (x+\sqrt{t})} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{t}\}$  nur für  $t \geq 0$  und  $D = \mathbb{R}$  für  $t < 0$  mit  $S_y(0|-\frac{1}{t})$  nur für  $t \neq 0$ , senkrechte Asymptoten mit VZW bei  $x = \pm\sqrt{t}$  nur für  $t \geq 0$  und waagrechter Asymptote  $y = 0$  für  $t \in \mathbb{R}$
- d)  $f_t(x) = \frac{x+t}{(x-t)^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|\frac{1}{t})$ ,  $S_x(-t|0)$  mit VZW, senkrechter Asymptote ohne VZW bei  $x = t$  und waagrechter Asymptote  $y = 0$
- e)  $f_t(x) = \frac{1}{t} \frac{(x+t)^2}{x-t} = \frac{1}{t}x + 3 + \frac{4t}{x-t} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|-1)$ ,  $S_x(-t|0)$  ohne VZW, senkrechter Asymptote mit VZW bei  $x = t$  und schiefer Asymptote  $y = \frac{1}{t}x + 3$ .
- f)  $f_t(x) = \frac{(x-\sqrt{t^2-1}) \cdot (x+\sqrt{t^2-1})}{x-t} = x+t + \frac{1}{x-t} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  mit  $S_y(0|-\frac{1}{t})$ ,  $S_x(\sqrt{t^2-1}|0)$  ohne VZW nur für  $|t| \geq 1$ , senkrechter Asymptote mit VZW bei  $x = t$  und schiefer Asymptote  $y = x+t$

### Aufgabe 11: Bestimmung von Funktionsgleichungen (Beispiele)

- a)  $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$
- b)  $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)^2} = \frac{x-1}{x^2-6x+9}$
- c)  $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1}$
- d)  $f(x) = \frac{4(x+1)}{x+4} = \frac{4x+4}{x+4}$
- e)  $f(x) = 2 + \frac{12}{x-1} = \frac{2x+10}{x-1}$
- f)  $f(x) = x+1 + \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$
- g)  $f(x) = -\frac{1}{2}x+1 + \frac{1}{x-1} = -\frac{x \cdot (x-3)}{2(x-1)} = \frac{-x^2+3x}{2x-2}$
- h)  $f(x) = x^1-1 + \frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^6-3x^4+3x^2}{x^4-2x^2+1}$

### Aufgabe 12: Symmetrie

- a)  $f(-x) = f(x) \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 0$
- b)  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(0|0)$
- c)  $f(-x) = f(x) \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 0$
- d)  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(0|0)$
- e)  $f(x+3) = x^2+4 \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 3$
- f)  $f(x+4) = x^2-2 \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 4$
- g)  $f(x-3)+2 = \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(-3|-2)$
- h)  $f(x+2) = \frac{1}{2^{-x}+2^x} \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 2$
- i)  $f(x+4) = \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 4$
- j)  $f(x-2) = \frac{4}{x^2} - 1 \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = -2$
- k)  $f(x+2) = -\frac{5}{x^2+1} \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 2$
- l)  $f(x+2) = \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow$  Symmetrie zu  $x = 2$
- m)  $f(x+3) - 1 = \frac{2}{x} \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(3|1)$
- n)  $f(x+1) - 3 = \frac{1}{2x} \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(1|3)$
- o)  $f(x+1) - 2 = \frac{3}{2x^2} \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(1|2)$
- p)  $f(x+1) - 1 = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow$  Symmetrie zu  $(1|1)$