

4.6. Prüfungsaufgaben zur Bestimmung von Funktionsgleichungen

Aufgabe 1 (2)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die eine Nullstelle bei $x = -2$, eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei $x = 2$, die waagrechte Asymptote bei $y = 1$ und eine hebbare Lücke an der Stelle $x = 0$ besitzt.

Lösung

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x} \quad (2)$$

Aufgabe 2 (2)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die eine Nullstelle bei $x = 0$, eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel bei $x = -2$, die waagrechte Asymptote bei $y = 1$ und eine hebbare Lücke an der Stelle $x = 2$ besitzt.

Lösung

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \quad (2)$$

Aufgabe 3 (4)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die die Asymptoten $y = x$ und $x = 0$ besitzt. Die Kurve soll außerdem durch den Punkt $P(2|1)$ gehen.

Lösung:

$$y = x + \frac{a}{x} \text{ mit } 1 = 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow y = x - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2}{x} \quad (4)$$

Aufgabe 4 (4)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die die Asymptoten $y = x$ und $x = 1$ besitzt. Die Kurve soll die y -Achse an der Stelle $y = 4$ schneiden.

Lösung:

$$y = x + \frac{a}{x-1} \text{ mit } 4 = 0 + \frac{a}{0-1} \Rightarrow a = -4 \Rightarrow y = x - \frac{4}{x-1} = \frac{x^2 - x - 4}{x-1} \quad (4)$$

Aufgabe 5 (4)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die die Asymptoten $y = x$ und $x = 0$ besitzt. Die Kurve soll außerdem an der Stelle $x = -1$ eine hebbare Lücke aufweisen.

Lösung:

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{(x^2+1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x} \quad (4)$$

Aufgabe 6 (4)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die die Asymptoten $y = -x$ und $x = 0$ besitzt. Die Kurve soll außerdem an der Stelle $x = 1$ eine hebbare Lücke aufweisen.

Lösung:

$$f(x) = \left(-x + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{(-x^2+1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{-x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - x} \quad (4)$$

Aufgabe 7 (3)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die für $x \rightarrow \pm \infty$ durch die Normalparabel und für $x \rightarrow 0$ durch die y -Achse angenähert wird. Die Kurve soll außerdem das Innere der Normalparabel nicht verlassen und an der Stelle $x = 1$ eine hebbare Lücke aufweisen. Hinweis: Zeichne zunächst eine Skizze und mache dir klar, wo das Innere der Normalparabel ist.

Lösung:

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{(x^4+1)(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{x^5 - x^4 + x - 1}{x^3 - x^2} \quad (3)$$

Aufgabe 8 (4)

Bestimme die Gleichung einer rationalen Funktion, die für $x \rightarrow \pm \infty$ durch die Normalparabel und für $x \rightarrow 0$ durch die y-Achse angenähert wird. Die Kurve soll außerdem das Innere der Normalparabel nicht berühren und an der Stelle $x = -1$ eine hebbare Lücke aufweisen. Hinweis: Zeichne zunächst eine Skizze und mache dir klar, wo das Innere der Normalparabel ist.

Lösung:

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{(x^4-1)(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{x^5 + x^4 - x - 1}{x^3 + x^2} \quad (4)$$