

## 4.6. Prüfungsaufgaben zu rationalen Funktionen mit Parametern

### Aufgabe 1: Waagrechte Asymptote mit Parameter (4)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{(x-t)^2}$  in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und zeichne eine Schaubildskizze für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ .

#### Lösung

$$D = \mathbb{R} \setminus \{t\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (0,5)$$

$$S_y(0 | \frac{1}{t^2}), \text{ falls } t \neq 0 \quad (0,5)$$

$$\text{senkrechte Asymptote bei } x = t \text{ ohne VZW, da doppelte NST nur im Nenner} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \text{waagrechte Asymptote } y = 0, \text{ da Zählergrad} < \text{Nennergrad} \quad (0,5)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

### Aufgabe 2: Waagrechte Asymptote mit Parameter (4)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2 - t^2}$  in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und zeichne eine Schaubildskizze für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ .

#### Lösung

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm t\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (0,5)$$

$$S_y(0 | -\frac{1}{t^2}), \text{ falls } t \neq 0 \quad (0,5)$$

$$\text{senkrechte Asymptote bei } x = \pm t \text{ mit VZW, da einfache NST nur im Nenner, falls } t \neq 0 \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \text{waagrechte Asymptote } y = 0, \text{ da Zählergrad} < \text{Nennergrad} \quad (0,5)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

### Aufgabe 3: Waagrechte Asymptote und hebbare Lücke mit Parameter (6)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{x-t}{x^2-t^2}$  in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ .

#### Lösung

$$f(x) = \frac{x-t}{(x-t)(x+t)} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \text{Stetige Fortsetzung } g(x) = \frac{1}{x+t} \text{ für } x \neq t \quad (0,5)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-t; t\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (0,5)$$

$$S_y(0 | \frac{1}{t}) \text{ nur für } t \neq 0 \quad (0,5)$$

$$L(t | \frac{1}{2t}), \text{ da NST im Zähler und im Nenner und } g(t) = \frac{1}{2t} \text{ nur für } t \neq 0 \quad (1)$$

$$\text{senkrechte Asymptote bei } x = -t \text{ mit VZW, da einfache NST nur im Nenner} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \text{waagrechte Asymptote } y = 0, \text{ da Zählergrad} < \text{Nennergrad} \quad (0,5)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

### Aufgabe 4: Waagrechte Asymptote und hebbare Lücke mit Parameter (6)

Untersuche die Funktion  $f(x) = \frac{x+t}{x^2-t^2}$  in Abhängigkeit von  $t \in \mathbb{R}$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze für  $t \in \{-2; 0; 2\}$ .

**Lösung:**

$$f(x) = \frac{x+t}{(x-t)(x+t)} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \text{Stetige Fortsetzung } g(x) = \frac{1}{x-t} \text{ für } x \neq -t \quad (0,5)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-t; t\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (0,5)$$

$$S_y(0 | -\frac{1}{t}) \text{ nur für } t \neq 0 \quad (0,5)$$

$$L(-t | -\frac{1}{2t}), \text{ da NST im Zähler und im Nenner und } g(-t) = -\frac{1}{2t} \text{ nur für } t \neq 0 \quad (1)$$

$$\text{senkrechte Asymptote bei } x = t \text{ mit VZW, da einfache NST nur im Nenner} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow \text{waagrechte Asymptote } y = 0, \text{ da Zählergrad} < \text{Nennergrad} \quad (0,5)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

**Aufgabe 5: Schiefe Asymptote und hebbare Lücke und mit Parameter (10)**

a) Gegeben ist die Funktion  $f_t(x) = \frac{x^2 - t^2}{2x + 6}$ . Untersuche  $f_t(x)$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte

sowie Asymptoten und hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze

b) Für welches  $t$  besitzt das Schaubild von  $f_t$  eine hebbare Lücke?

**Lösung**

$$\text{a) } f_t(x) = \frac{x^2 - 1}{2(x+3)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, N_y(0 | -\frac{1}{6}), N_{x1/2}(\pm 1 | 0) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x-1)(x+1)}{x+3} \quad \text{senkrechte Asymptote bei } x = -3 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{4}{x+3} \quad \text{schiefe Asymptote } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{Schaubild} \quad (2)$$

$$\text{b) } f_t(x) = \frac{(x-t)(x+t)}{2(x+3)} \quad \text{hebbare Lücke für } t = \neq 3 \quad (2)$$

**Aufgabe 6: Schiefe Asymptote und hebbare Lücke und mit Parameter (10)**

a) Gegeben ist die Funktion  $f_t(x) = \frac{x^2 - t^2}{2x - 4}$ . Untersuche  $f_t(x)$  auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte

sowie Asymptoten und hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze.

b) Für welche  $t$  besitzt das Schaubild von  $f_t$  eine hebbare Lücke?

**Lösung**

$$\text{a) } f_t(x) = \frac{x^2 - 1}{2(x-2)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, N_y(0 | \frac{1}{4}), N_{x1/2}(\pm 1 | 0) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} \quad \text{senkrechte Asymptote bei } x = 2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{x-2} \quad \text{schiefe Asymptote } y = \frac{1}{2}x + 1 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild} \quad (2)$$

$$\text{b) } f_t(x) = \frac{(x-t)(x+t)}{2(x-2)} \quad \text{hebbare Lücke für } t = \pm 2 \quad (2)$$