

4.6. Prüfungsaufgaben zu rationalen Funktionen ohne Parameter

Aufgabe 1: Waagrechte Asymptote

Untersuche die Funktionen $f(x) = \frac{x+4}{x^2-2x-3}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und zeichne eine Schaubildskizze. (16)

Lösung

$$f(x) = \frac{x+4}{(x-3)(x+1)} \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \text{ (NST im Nenner)} \quad (0,5)$$

$$\text{Achsenschnittpunkte } S_y(0|-\frac{4}{3}) \text{ und } S_x(-4|0) \text{ (NST nur im Zähler)} \quad (1,5)$$

$$\text{Senkrechte Asymptoten mit VZW bei } x = -1 \text{ und } x = 3 \text{ (einfache NST nur im Nenner)} \quad (1)$$

$$\text{Waagrechte Asymptote } y = 0 \text{ (Nennergrad } > \text{ Zählergrad)} \quad (1)$$

$$\text{Schaubild} \quad (2)$$

Aufgabe 2: Waagrechte Asymptote

Untersuche die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und zeichne eine Schaubildskizze. (16)

Lösung

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ (NST im Nenner)} \quad (0,5)$$

$$\text{Achsenschnittpunkte } S_y(0|\frac{1}{4}), \text{ keine Nullstelle, da keine NSAT im Zähler} \quad (0,5)$$

$$\text{Senkrechte Asymptoten ohne VZW bei } x = 2 \text{ (doppelte NST nur im Nenner)} \quad (1)$$

$$\text{Waagrechte Asymptote } y = 0 \text{ (Nennergrad } > \text{ Zählergrad)} \quad (1)$$

$$\text{Schaubild} \quad (2)$$

Aufgabe 3: Hebbare Lücke und waagrechte Asymptote (7)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = \frac{x}{x^2-x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \text{ keine Achsenschnittpunkte} \quad (2)$$

$$= \frac{x}{x(x-1)} \quad \text{senkrechte Asymptote bei } x = 1 \quad (1)$$

$$\text{hebbare Lücke bei } x = 0 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{x-1} \quad (x \neq 0) \quad \text{waagrechte Asymptote } y = 0 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild} \quad (2)$$

Aufgabe 4: Hebbare Lücke und waagrechte Asymptote (7)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, N_y(0|1) \quad (2)$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \quad \text{senkrechte Asymptote bei } x = -1 \quad (1)$$

$$\text{hebbare Lücke bei } x = 1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{x+1} \quad (x \neq 1) \quad \text{waagrechte Asymptote } y = 0 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild} \quad (2)$$

Aufgabe 5: Schiefe Asymptote (7)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{x+1} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (0,5)$$

$$S_y(0|-4), S_{x_1}(1|0), N_{x_2}(-4|0), \text{ da NST im Zähler aber nicht im Nenner} \quad (2)$$

$$\text{senkrechte Asymptote mit VZW bei } x = -1, \text{ da NST im Nenner aber nicht im Zähler} \quad (1)$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{6}{x+1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{ schiefe Asymptote } g(x) = x + 2, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{x+1} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (1)$$

Aufgabe 6: Schiefe Asymptote (7)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{x-1} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (0,5)$$

$$S_y(0|4), S_{x_1}(-1|0), N_{x_2}(4|0), \text{ da NST im Zähler aber nicht im Nenner} \quad (2)$$

$$\text{senkrechte Asymptote mit VZW bei } x = 1, \text{ da NST im Nenner aber nicht im Zähler} \quad (1)$$

$$f(x) = x - 2 - \frac{6}{x-1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{ schiefe Asymptote } g(x) = x - 2, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{x-1} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (1)$$

Aufgabe 7: Hebbare Lücke und schiefe Asymptote (10)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2x^2 - 8}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = \frac{x(x-2)(x-1)}{2(x-2)(x+2)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (1)$$

$$N_{x_1}(0|0), N_{x_2}(1|0), \text{ da NST im Zähler aber nicht im Nenner} \quad (1)$$

$$\text{senkrechte Asymptote mit VZW bei } x = -2, \text{ da NST im Nenner aber nicht im Zähler} \quad (1)$$

$$\text{Stetige Fortsetzung } \bar{f}(x) = \frac{x(x-1)}{2(x+2)} \Rightarrow \text{hebbare Lücke } L(2 | \frac{1}{4}), \text{ da NST im Zähler und im Nenner} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{3}{x+2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{ schiefe Asymptote } g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x+2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

Aufgabe 8: Hebbare Lücke und schiefe Asymptote (10)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{-x^3 - x^2 + 2x}{x^2 - 4}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = -\frac{x(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (1)$$

$$N_{x_1}(0|0), N_{x_2}(1|0), \text{ da NST im Zähler aber nicht im Nenner} \quad (1)$$

$$\text{senkrechte Asymptote mit VZW bei } x = 2, \text{ da NST im Nenner aber nicht im Zähler} \quad (1)$$

$$\text{Stetige Fortsetzung } \bar{f}(x) = -\frac{x(x-1)}{(x-2)} \Rightarrow \text{hebbare Lücke } L(-2 | \frac{3}{2}), \text{ da NST im Zähler und Nenner} \quad (2)$$

$$f(x) = -x - 1 - \frac{2}{x-2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{ schiefe Asymptote } g(x) = -x - 1, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{2}{x-2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

Aufgabe 9: Näherungskurve (13)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten und Näherungskurven und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1} \quad N_y(0|0) \quad (1)$$

$$= \frac{x^2(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, N_{x_1}(0|0) \text{ (doppelt)}, N_{x_2/3}(\pm 2|0) \quad (4)$$

$$= x^2 - 3 - \frac{3}{x^2 - 1} \quad \text{senkrechte Asymptoten bei } x = \pm 1 \quad (2)$$

$$\text{Näherungskurve } g(x) = x^2 - 3 \quad (2)$$

$$\text{Schaubild} \quad (4)$$

Aufgabe 10: Näherungskurve (11)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x}{(x-1)^2}$

- a) Untersuche f auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte und senkrechte Asymptoten. (6)
- b) Berechne die Gleichung der Näherungskurve und bestimme ihren Scheitelpunkt. (2)
- c) Skizziere die Schaubilder der Funktion und ihrer Näherungskurve in ein gemeinsames Koordinatensystem. (3)

Lösung

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x}{(x-1)^2} \quad N_y(0|0) \quad (1)$$

$$= \frac{x(x-2)(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, N_{x1}(0|0), N_{x2}(2|0) \quad (4)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{senkrechte Asymptote ohne VZW bei } x = 1 \quad (1)$$

$$\text{Näherungskurve } g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \text{ mit } S(1|0) \quad (2)$$

Schaubild mit richtigen VZ (3)

Aufgabe 11: Näherungskurve (11)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x}{(x+1)^2}$

- a) Untersuche f auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte und senkrechte Asymptoten. (6)
- b) Berechne die Gleichung der Näherungskurve und bestimme ihren Scheitelpunkt. (2)
- c) Skizziere die Schaubilder der Funktion und ihrer Näherungskurve in ein gemeinsames Koordinatensystem. (3)

Lösung

$$f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x}{(x+1)^2} \quad N_y(0|0) \quad (1)$$

$$= \frac{x(x+2)(x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, N_{x1}(0|0), N_{x2}(-2|0) \quad (4)$$

$$= x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{senkrechte Asymptote ohne VZW bei } x = -1 \quad (1)$$

$$\text{Näherungskurve } g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \text{ mit } S(-1|0) \quad (2)$$

Schaubild mit richtigen VZ (3)

Aufgabe 12: hebbare Lücke und Näherungskurve (9)

Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2x + 2}{2x^2 - 2}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte sowie

Asymptoten, hebbare Lücken und ganzrationale Näherungskurven. Skizziere außerdem den Verlauf des Schaubildes.

Lösung

$$f(x) = \frac{(x^3 - x^2 + 2)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} \quad N_y(0|-1) \quad (1)$$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 2)(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} \quad \text{hebbare Lücke bei } L(-1|0) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \quad \text{senkrechte Asymptote bei } x = 1 \quad (2)$$

$$\text{Näherungskurve } g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (2)$$

Schaubild mit richtigen VZ (2)

Aufgabe 13: hebbare Lücke und Näherungskurve (9)

Untersuche das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 2x + 2}{2x^2 - 2}$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte sowie Asymptoten, hebbare Lücken Näherungskurven. Skizziere außerdem den Verlauf des Schaubildes.

Lösung

$$f(x) = \frac{(x^3 + x^2 - 2)(x - 1)}{2(x - 1)(x + 1)} \quad N_y(0|-1) \quad (1)$$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 2)(x - 1)^2}{2(x - 1)(x + 1)} \quad \text{hebbare Lücke bei } L(1|0) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} \quad \text{senkrechte Asymptote bei } x = -1 \quad (2)$$

$$\text{Näherungskurve } g(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (2)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$

Aufgabe 14: Hebbare Lücke und Näherungskurve (10)

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - 1}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Näherungskurven sowie hebbare Lücken und zeichne eine Schaubildskizze.

Lösung

$$f(x) = -\frac{x(x - 1)^3}{(x + 1)(x - 1)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \text{ da NST im Nenner} \quad (1)$$

$$N_{x1}(0|0), \text{ da NST nur im Zähler} \quad (1)$$

$$\text{senkrechte Asymptote mit VZW bei } x = -1, \text{ da NST nur im Nenner} \quad (1)$$

$$\text{Stetige Fortsetzung } \bar{f}(x) = -\frac{x(x - 1)^2}{(x + 1)} \Rightarrow \text{hebbare Lücke } L(1|0), \text{ da NST im Zähler und Nenner} \quad (2)$$

$$\bar{f}(x) = x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{x + 1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{Näherungskurve } g(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ (Normalparabel mit } S(\frac{3}{2} | \frac{7}{4}), \text{ da } \frac{4}{x + 1} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm \infty. \quad (1)$$

$$\text{Schaubild mit richtigen VZ} \quad (2)$$