4.6. Prüfungsaufgaben zu Symmetrie und Verschiebung

Aufgabe 1: Symmetrie und Verschiebung (8)

Gegeben ist die Funktion f(x) = $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$.

a) Skizziere ihr Schaubild in einem geeigneten Bereich. (2)
b) Beschreibe ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ und begründe rechnerisch. (2)
c) Untersuche das Schaubild auf Symmetrie und belege deine Vermutung rechnerisch. (4)

Lösung

a) Skizze (2)

b) Waagrechte Asymptote y = 1, da $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3}$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-3} = 0$ (2)

c) Das Schaubild von $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \frac{(x-3)^2 + 1}{(x-3)} + 2$ ist punktsymmetrisch zu S(3 | 2), weil das Schaubild der um $x_0 = -3$ und $y_0 = -2$ zurück verschobene Funktion $y + 2 = f(x + 3) \Leftrightarrow y = \frac{x^2+1}{x}$ ungerade bzw. symmetrisch zum Ursprung ist.
(4)

Aufgabe 2: Symmetrie und Verschiebung (8)

Gegeben ist die Funktion f(x) = $\frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4x + 5}$.

a) Skizziere ihr Schaubild in einem geeigneten Bereich. (2)
b) Beschreibe ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ und begründe rechnerisch. (2)
c) Untersuche das Schaubild auf Symmetrie und belege deine Vermutung rechnerisch. (4)

Lösung

a) Skizze (2)

b) Waagrechte Asymptote y = 1, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}\right) = 1 + 0 = 1$ (2)

c) Das Schaubild von y = f(x) ist punktsymmetrisch zu S(2 | 1) (1)

Begründung: das Schaubild der zurück verschobene Funktion $y + 1 = f(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x^2+1}$ ist ungerade bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung. (3)