4.6. Rationale Funktionen

Rationale Funktionen

Eine Funktion der Form $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ heißt **rationale Funktion**, wenn z(x) und $n(x) \neq 0$ zwei ganzrationale Funktionen sind. Der **maximale Definitionsbereich** ist $\mathbb{R}\backslash\{x\colon n(x) = 0\}$. Man unterscheidet **ganzrationale** Funktionen, deren **Nennergrad gleich Null** ist, **gebrochenrationale** Funktionen mit **Nennergrad größer als Null** und **echt gebrochenrationale** Funktionen, deren **Nennergrad größer als der Zählergrad** ist. Zur Erinnerung: Der **Grad** einer ganzrationalen Funktion ist ihr größter Exponent

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 1

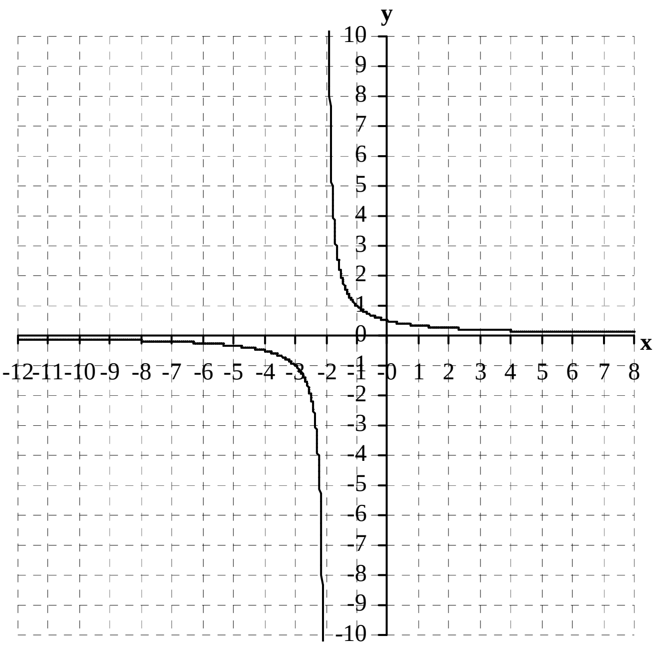
4.6.1. Asymptoten und Grenzwerte

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Maximaler Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ (NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid \frac{1}{2})$ (x = 0 einsetzen)

Schnittpunkt mit der x-Achse: - (f(x) = 0 hat keine Lösung)



Verhalten für $x \to -2$:

x	$y = \frac{1}{x+2}$
−1,9	−10
−1,99	−100
−1,999	−1000
↓	↓
−2	± ∞
↑	↑
−2,001	1000
−2,01	100
−2,1	10

Für $x \to -2$ streben die y-Werte gegen $\pm\infty$ und das Schaubild nähert sich einer senkrechten **Näherungsgerade (Asymptote)** mit der Gleichung $x = -2$: $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to -2$.

Asymptoten und Polstellen

Eine **Asymptote** ist eine **Näherungsgerade** im Schaubild einer Funktion f: Das Schaubild kommt ihr für betragsgroße x oder y beliebig nahe. Senkrechte Asymptoten nennt man auch **Polstellen**.

Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Eine Funktion f strebt für $x \to \pm\infty$ gegen den **Grenzwert** (lat. Limes) a, wenn die Funktionswerte f(x) für genügend kleine bzw. große x beliebig nahe an die Zahl a herankommen: $f(x) \to a$ für $x \to \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$. Das Schaubild von f besitzt dann für $x \to \pm\infty$ eine **waagrechte Asymptote** y = a.

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

x	$y = \frac{1}{x+2}$
− ∞	0
↑	↑
−10000	−0,0001
−1000	−0,001
−100	−0,01
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001
↓	↓
+ ∞	0

Für **x** $\to \pm\infty$ streben die y-Werte gegen 0 und das Schaubild nähert sich einer waagrechten **Näherungsgerade (Asymptote)** mit der Gleichung y = 0: $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 2

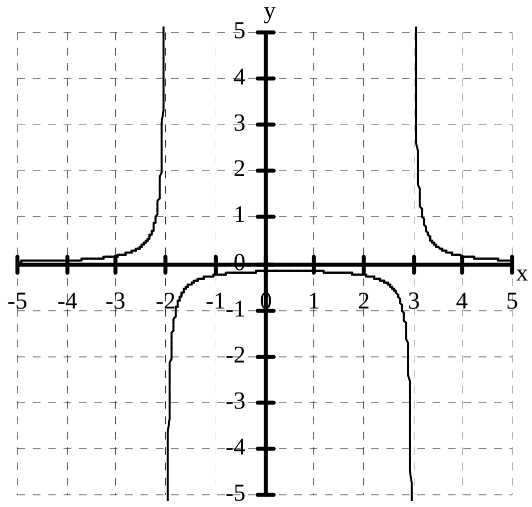
4.6.2. Nullstellen im Nenner

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{(x+2)\cdot(x-3)}$

Definitionsbereich: D = $\mathbb{R}\backslash\{-2;3\}$
(NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_y(0|-\frac{1}{6})$
(x = 0 einsetzen)

Schnittpunkt mit der x-Achse: -
(f(x) = 0 ergibt keine Lösung)



Verhalten in der Nähe von x = −2:

$f(x) = \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-3} \rightarrow \pm\infty\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \pm\infty$ für $x \rightarrow -2$

$\frac{1}{x-3} \rightarrow -\frac{1}{5}$ für $x \rightarrow -2$

$\frac{1}{x+2} \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow -2$

⇒ **senkrechte Asymptote an der Nennernullstelle x = −2**

Verhalten in der Nähe von x = 3:

$f(x) = \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-3} \rightarrow \frac{1}{5}\cdot\pm\infty = \pm\infty$ für $x \rightarrow 3$

$\frac{1}{x-3} \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow 3$

$\frac{1}{x+2} \rightarrow \frac{1}{5}$ für $x \rightarrow 3$

⇒ **senkrechte Asymptote an der Nennernullstelle x = 3**

Verhalten für x → ± ∞:

$f(x) = \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-3} \rightarrow 0\cdot 0 = 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$

⇒ **waagrechte Asymptote y =** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ **f(x) = 0**

Senkrechte Asymptoten

n-fache NST **nur** im Nenner ⇒ **senkrechte Asymptote** $\left\{\begin{array}{l}\text{mit VZW, falls n ungerade}\\ \text{ohne VZW, falls n gerade}\end{array}\right\}$.

(Vorsicht: NST im Nenner **und** im Zähler erzeugen stattdessen hebbare Lücken, s.u.)

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 3

4.6.3. Nullstellen im Zähler

Beispiel f(x) = $\frac{x-1}{x^2 - x - 6} = \frac{x-1}{(x+2)\cdot(x-3)}$

Definitionsbereich D = $\mathbb{R}\backslash\{-2;3\}$
(NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_y(0|\frac{1}{6})$
(x = 0 einsetzen)

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N_x(1|0)$
(f(x) = 0 setzen und nach x auflösen)

Senkrechte Asymptoten: x = 3 und x = −2
(NST nur im Nenner)

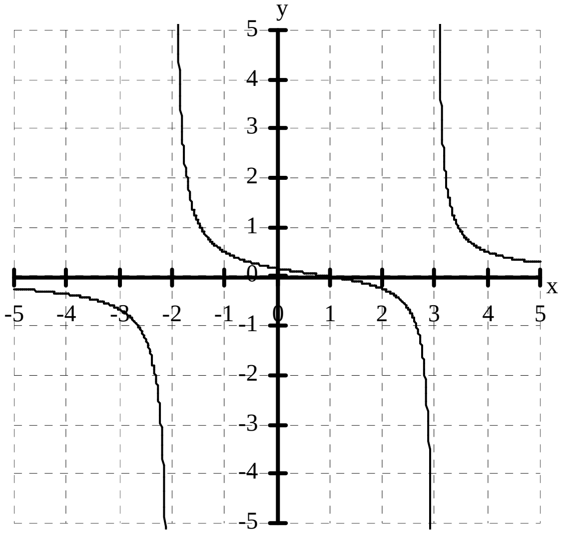
Verhalten für x → ± ∞:

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-3} \rightarrow 1\cdot 0 = 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$

$\frac{1}{x-3} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$

$\frac{x-1}{x+2} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \pm\infty$

⇒ **waagrechte Asymptote y =** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ **f(x) = 0**



Nullstellen rationaler Funktionen

n-fache NST **nur** im Zähler ⇒ **NST der Gesamtfunktion** $\begin{Bmatrix} \text{mit VZW, falls n ungerade} \\ \text{ohne VZW, falls n gerade} \end{Bmatrix}$.

(Vorsicht: NST im Nenner **und** im Zähler erzeugen stattdessen hebbare Lücken, s.u.)

Verhalten echt gebrochenrationaler Funktionen für x → ± ∞

Wenn der **Nennergrad größer ist als der Zählergrad**, wächst für x → ± ∞ der **Nenner schneller als der Zähler** und die Gesamtfunktion strebt gegen 0: f(x) → 0 für x → ± ∞ bzw $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$: Die x-Achse y = 0 ist waagrechte Asymptote.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 4

4.6.4. Nullstellen im Zähler und im Nenner

Beispiel : $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-6} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-3)}$

Definitionsbereich D = ℝ\{−2;3}
(NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_y(0|-\frac{1}{3})$

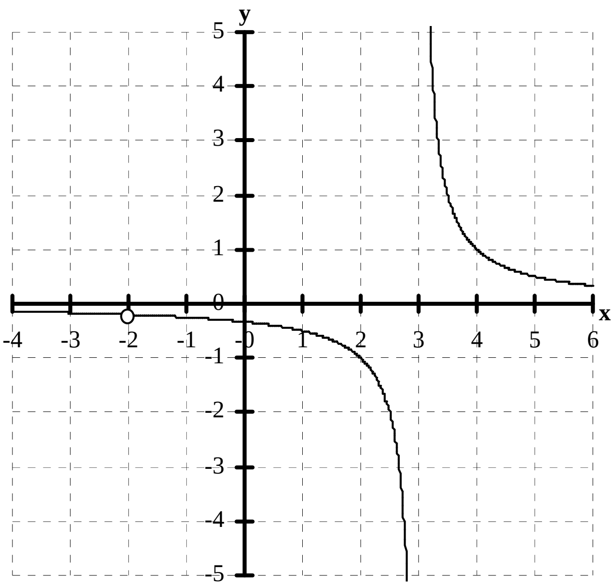
(x = 0 einsetzen)
Schnittpunkt mit der x-Achse -
(f(x) = 0 nach x auflösen):

$$\frac{x+2}{(x+2)\cdot(x-3)} = 0 \;\Big|\; \cdot(x+2)\cdot(x-3) \text{ für } x \neq -2 \text{ oder } 3$$

$$x+2 = 0 \;\Big|\; -2$$

$$x = -2, \text{ aber andererseits } x \neq -2$$

⇒ **keine Nullstelle, da f an der Zählernullstelle nicht definiert ist!**
Senkrechte Asymptote: x = 3
(NST nur im Nenner))



Hebbare Lücke: $L(-2|-\frac{1}{5})$

(NST im Zähler und im Nenner):
x = 2 ist gleichzeitig Nullstelle des Zählers und des Nenners. Der **Linearfaktor** (x + 2) erscheint daher sowohl im Zähler als auch im Nenner und kann für x ≠ −2 gekürzt werden: $\dfrac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$, falls x ≠ −2. Bis auf die Stelle x = −2 stimmt das Schaubild von f vollständig mit dem Schaubild der **stetigen Fortsetzung** $\bar{f}(x) = \dfrac{1}{x-3}$ überein. An der Stelle x = −2 hat das Schaubild von f eine **Lücke**, die durch die stetige Fortsetzung **behoben** wird. x = −2 heißt daher **hebbare Lücke**. f ist an dieser Stelle **unstetig**, da sie den gleichen Punkt anstrebt wie $\bar{f}$, diesen aber im Gegensatz zu $\bar{f}$ nie erreicht: f(-2) existiert nicht, aber $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \bar{f}(x) = \bar{f}(-2) = -\frac{1}{5}$ Den **y-Wert** der hebbaren Lücke $L(-2|-\frac{1}{5})$ erhält man also durch **Einsetzen in die stetige Fortsetzung**.

Zählernullstellen und Nennernullstellen bei rationalen Funktionen

$\left.\begin{array}{l} \text{n-fache NST } \textbf{nur im Zähler} \Rightarrow \textbf{NST} \text{ der Gesamtfunktion} \\ \text{n-fache NST } \textbf{nur im Nenner} \Rightarrow \textbf{Polstelle} \text{ bzw. senkrechte Asymptote} \end{array}\right\} \text{jeweils } \begin{Bmatrix} \text{mit VZW, falls n ungerade} \\ \text{ohne VZW, falls n gerade} \end{Bmatrix}$

NST **im Zähler und im Nenner** ⇒ **hebbare Lücke**

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 5

4.6.5. Polynomdivision mit Rest

Beispiel mit festem x = 10 (schriftliche Division mit Rest)

$1355 : 112 \; = \; 12 + \frac{11}{112}$

$$\begin{array}{l} \underline{112} \\ \;\;235 \\ \;\;\underline{224} \\ \;\;\;\;11 \text{ (Rest)} \end{array}$$

Probe: $\left(12 + \frac{11}{112}\right) \cdot 112 = 1344 + 11 = 1355$

Ergebnis: $\frac{1355}{112} = 12\frac{11}{112}$

Merke: Jeder Bruch lässt sich aufspalten in eine ganze Zahl und einen echten Bruch < 1.

Beispiel mit beliebigem x ϵ ℝ (Polynomdivision mit Rest)

$$(x^3 + 3x^2 + 5x + 5):(x^2 + x + 2) = \underbrace{x + 2}_{\text{ganzrationaler Hauptteil } h(x)} + \underbrace{\frac{x+1}{x^2 + x + 2}}_{\text{echt gebrochenrationaler Rest } r(x)}$$

$$\begin{array}{l} \underline{(x^3 + x^2 + 2x)} \\ \quad 2x^2 + 3x + 5 \\ \quad \underline{-(2x^2 + 2x + 4)} \\ \qquad\quad x + 1 \text{ (Rest)} \end{array}$$

Probe: $\left(x + 2 + \frac{x+1}{x^2 + x + 2}\right) \cdot (x^2 + x + 2) = x^3 + 3x^2 + 5x + 5$

Ergebnis: $\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{x^2 + x + 2} = x + 2 + \frac{x+1}{x^2 + x + 2}$

Merke: Jede gebrochenrationale Funktion f(x) lässt sich durch Polynomdivision in einen ganzrationalen **Hauptteil h(x)** und einen echt gebrochenrationalen **Rest r(x)** aufspalten.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 6

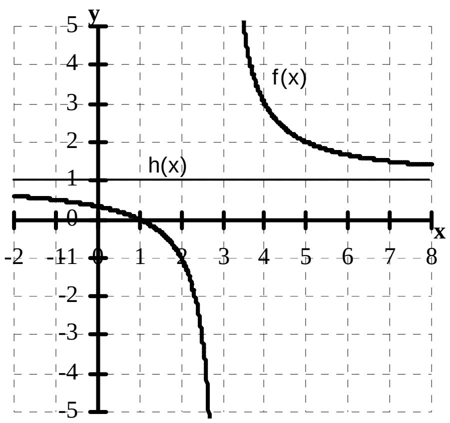
4.6.6. Waagrechte Asymptoten

Beispiel f(x) = $\frac{x-1}{x-3}$

Definitionsbereich D = ℝ\{3}
(NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_y(0|\frac{1}{3})$
(x = 0 einsetzen)

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N_x(1|0)$
(NST nur im Zähler)
senkrechte Asymptote bei x = 3
(NST nur im Nenner)



Verhalten für x → ± ∞:

$f(x) = \frac{x-1}{x-3} = 1 + \underbrace{\frac{2}{x-3}}_{\to\, 0 \text{ für } x \to \pm\infty} \;\to\; 1 + 0 \;=\; 1 \text{ für } x \to \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

Für x → ± ∞ strebt der **echt gebrochenrationale Rest r(x)** gegen Null: $\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - h(x)] = 0$. Der Verlauf des Schaubildes wird dann nur noch durch den **ganzrationalen Hauptteil h(x)** bestimmt. Für x → ± ∞ ist der ganzrationale Hauptteil $h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ eine **waagrechte Asymptote**.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 7

4.6.7. Schiefe Asymptoten

Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x-3} = \frac{(x+2)\cdot(x-1)}{x-3} = \underbrace{x+4}_{\substack{\text{Hauptteil}\\ h(x)}} + \underbrace{\frac{10}{x-3}}_{\substack{\text{Rest}\\ r(x)}}$$

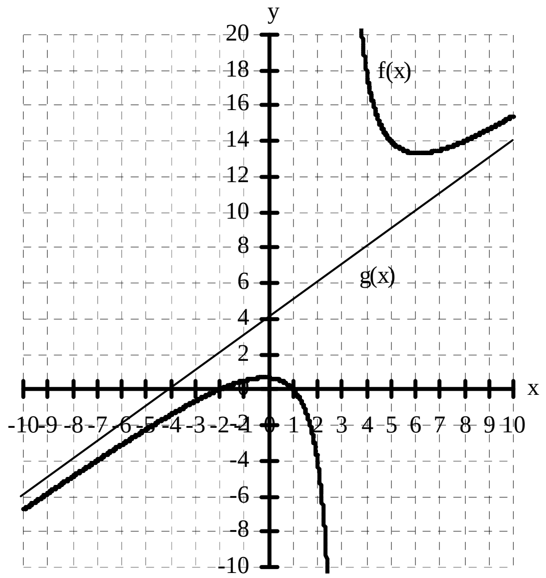
(p-q-Formel bzw. Polynomdivision mit Rest)

Definitionsbereich: D = $\mathbb{R}\backslash\{3\}$
(NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_y(0|\frac{2}{3})$

(x = 0 einsetzen)

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{x1}(-2|0)$, $N_{x2}(1|0)$
(NST nur im Zähler)
senkrechte Asymptoten: x = 3
(NST nur im Nenner)
Verhalten für x → ± ∞:



Für x → ± ∞ strebt der echt gebrochenrationale Rest gegen Null: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - h(x)] = 0$. Das Schaubild wird dann nur noch durch den Hauptteil bestimmt. Der ganzrationale Hauptteil **h(x) = x + 4** ist für x → ± ∞ eine **schiefe Asymptote.**

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 8

4.6.8. Näherungskurven

Beispiel f(x) $= \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x-6}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)}{x-3}$

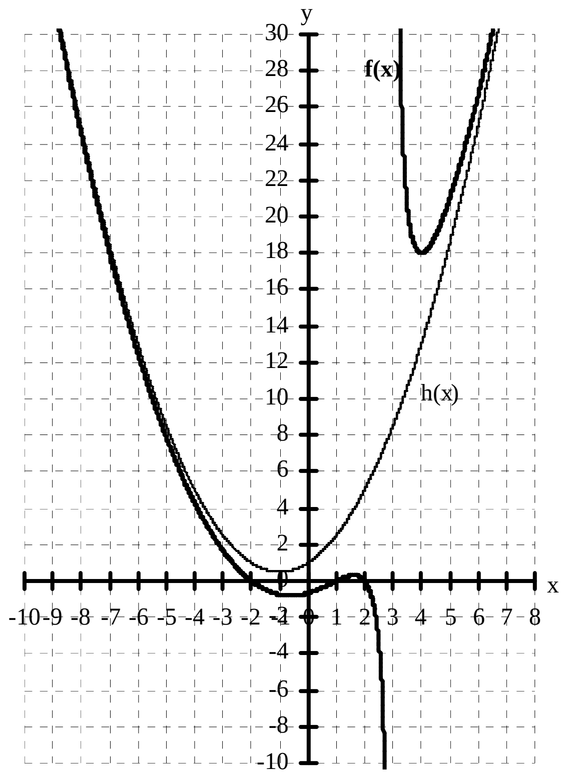
$= \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}_{\substack{\text{Hauptteil}\\ h(x)}} + \underbrace{\frac{5}{x-3}}_{\substack{\text{Rest}\\ r(x)}}$

Definitionsbereich: D = $\mathbb{R}\backslash\{3\}$
(NST im Nenner)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $N_y(0|-\frac{2}{3})$

(x = 0 einsetzen)

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{x1}(-2|0)$, $N_{x2}(1|0)$ und $N_{x3}(2|0)$
(NST nur im Zähler)
senkrechte Asymptote: x = 3
(NST nur im Nenner)
Verhalten für x → ± ∞:



Der echt gebrochenrationale Rest strebt für x → ± ∞ gegen Null: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - h(x)] = 0$. Das Schaubild wird dann nur noch durch den Hauptteil bestimmt. Der Hauptteil $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ ist für x → ± ∞ eine **Näherungskurve.** Mit **quadratischer Ergänzung** erhält man $h(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$, d.h. die Näherungskurve ist eine nach oben geöffnete **Parabel** mit Formfaktor $a = \frac{1}{2}$ und Scheitelpunkt $S(-1|\frac{1}{2})$.

Aufspaltung rationalen Funktionen in ganzrationalen Hauptteil und echt gebrochenrationalen Rest
Jede rationale Funktion lässt sich mit Hilfe einer **Polynomdivision** als Summe aus einem **ganzrationalen Hauptteil** h(x) und einem **echt gebrochenrationalen Rest** r(x) schreiben: f(x) = h(x) + r(x). Da der Rest r(x) für $x \to \pm\infty$ gegen Null strebt, bildet der Hauptteil y = h(x) eine **Näherungskurve** von f: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - h(x)] = 0$.

Grad der Näherungskurve
Sei $f(x) = \frac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0}$ eine rationale Funktion mit Zählergrad n und Nennergrad m. Dann gilt für
n < m: **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung h(x) = 0
n = m: **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $h(x) = \frac{a_m}{b_b}$
n > m: **ganzrationale Näherungskurve** h(x) vom Grad n − m

Übungen: Aufgaben zu rationalen Nr. 9 und 10

4.6.9. Bestimmung von Funktionsgleichungen

Beispiel: Verhalten für $x \to \pm\infty$ ist nicht vorgegeben
Gib die Gleichung einer rationalen Funktion an, deren Schaubild bei x = −4 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, bei x = 5 eine hebbare Lücke und bei x = 1 eine senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel besitzt.
Lösung: Ansatz in Produktform

NST mit VZW bei x = −4 ⇒ Faktor (x + 4) im Zähler

hebbare Lücke bei x = 5 ⇒ Faktor (x − 5) im Zähler und im Nenner

senkrechte Asymptote ohne VZW bei x = 1 ⇒ Faktor $(x-1)^2$ im Nenner

$\Rightarrow$ Z.B. $f(x) = \frac{(x+4)(x-5)}{(x-5)(x-1)^2} = \frac{x^2 - x - 20}{x^3 - 7x + 11x - 5}$

Beispiel: Verhalten für $x \to \pm\infty$ ist vorgegeben
Gib die Gleichung einer rationalen Funktion an, deren Schaubild eine Näherungskurve mit der Gleichung $y = -x^2 + 2$, bei x = −6 eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel und bei x = 5 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.
Lösung: Ansatz als ganzrationaler Hauptteil mit echt gebrochenrationalem Rest

Näherungskurve $y = -x^2 + 2$ ⇒ ganzrationaler Hauptteil $-x^2 + 2$

Senkrechte Asymptote mit VZW bei x = −6 ⇒ echt gebochenrationaler Rest $\frac{a}{x+6}$ mit $a \neq 0$

Nullstelle mit VZW bei x = 5 ⇒ f(5) = 0

$\Rightarrow$ Ansatz $f(x) = -x^2 + 2 + \frac{a}{x+6}$ mit $f(5) = 0 \Leftrightarrow -25 + 2 + \frac{a}{11} = 0 \Leftrightarrow a = 253$

$\Rightarrow$ Z.B. $f(x) = -x^2 + 2 + \frac{253}{x+6} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 2x + 265}{x+6}$

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 11