4.7. Aufgaben zum beschränkten Wachstum

Aufgabe 0: Rekursionsformeln mit dem GTR am Beispiel Ratensparen
Beantworte die folgenden Fragen jeweils mit Hilfe einer Rekursionsformel vom Typ $b(t + 1) = d + k\cdot b(t)$ und den GTR:

a) Ein Lottogewinn von 1 000 000 € wird zu 2 % verzinst. Außerdem werden jedes Jahr 50 000 € abgehoben. Wie lange reicht das Geld?
b) Ein Bausparvertrag wird mit 3 % verzinst. Außerdem werden jedes Jahr 5000 € eingezahlt. Wie hoch ist der Auszahlungsbetrag nach 15 Jahren?
c) Ein Ratenkredit über 50 000 € wird mit 5 % verzinst. Außerdem werden jedes Jahr 6000 € getilgt. Nach wieviel Jahren ist der Kredit zurückgezahlt?

Aufgabe 1: Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum beim radioaktiven Zerfall)
Radon-222 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,6 Tagen in das sehr viel stabilere Isotop Polonium-218 ($t_{1/2}$ = 3 Mio Jahre).

a) Bestimme die Formel für den Bestand r(t) an Radon-Atomen nach t Tagen für einen Anfangsbestand von r(0) = 1000.
b) Wie viele Polonium-Atome p(t) sind nach t = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 und 30 Tagen aus den 1000 Radon-Atomen gebildet worden?
c) Stelle eine Formel auf, mit der sich die Zahl p(t) der nach t Tagen gebildeten Polonium-Atome berechnen lässt.
d) Beschreibe das Verhalten von p(t) für $t \to \infty$ und gib die **Wachstumsgrenze** P an.

Aufgabe 2: Beschränktes Wachstum bei einer chemischen Reaktion
Ester sind weit verbreitete Aromastoffe, die sich aus je einem Molekül Alkohol und Säure unter Austritt eines Wassermoleküls bilden: Alkohol + Säure $\to$ Ester + Wasser. Leider läuft die Reaktion nicht vollständig ab, d.h., es bleibt immer ein Rest an Alkohol und Säure übrig.
Bei der Reaktion von 1000 Alkoholmolekülen mit 1000 Säuremolekülen wurde die Zahl e(t) der gebildeten Estermoleküle über die Zeit t in Minuten in die folgende Tabelle eingetragen:

t in Min	0	1	2	3	4	5	10	15
e(t)	0	130	226	296	349	388	475	494

a) Trage die gegebenen Werte in ein Schaubild ein und bestimme die Sättigungsgrenze E.
b) Berechne die Wachstumskonstante k aus den Tabellenwerten für t = 1 und 2 Minuten unter der Annahme eines beschränkten Wachstums.
c) Berechne e(10) und e(15) mit der Formel für beschränktes Wachstum und vergleiche mit den Tabellenwerten.

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum bei Baumschäden
In einem Bestand von ursprünglich 10 000 Bäumen werden jedes Jahr 20 % der noch nicht geschädigten Bäume durch den Borkenkäfer befallen.

a) Berechne die Zahl B(t) der befallenen Bäume nach t = 1, 2, 3, 4, 5, 10 und 20 Jahren
b) Nach wie vielen Jahren wären 90 % aller Bäume befallen?

Aufgabe 4: Beschränktes Wachstum einer Pilzkultur
Eine Petrischale mit einer Gesamtfläche von 40 cm^2 ist zur Zeit t = 0 bereits zur Hälfte mit einer Pilzkultur bedeckt. Für das weitere Wachstum wurde experimentell die Formel $p(t + 1) = 0{,}75\cdot p(t) + 10$ ermittelt. Dabei ist B(t) die nach t Tagen bedeckte Fläche in cm^2.

a) Berechne B(t) für t = 1, 2, 3, 4 und 5 Tage.
b) Bestimme den Änderungsfaktor k und die Wachstumsgrenze P.
c) Nach wie vielen **Tagen** und wie vielen **Stunden** ist die Petrischale bis auf 1 cm^2 von der Pilzkultur bedeckt?

Aufgabe 5: Beschränkte Abnahme einer Landesbevölkerung
In einem Land mit 80 Millionen Einwohnern kommen jährlich auf 1000 Einwohner 8 Geburten und 11 Todesfälle im Jahr. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 50 000 Personen auswandern und 200 000 Personen einwandern.

a) Berechne die Einwohnerzahl z(t) nach t = 1, 2, und 3 Jahren
b) Bestimme den Änderungsfaktor k und die Grenzbevölkerung P.
c) Berechne die Einwohnerzahl z(t) nach t = 10, 20 und 50 Jahren.
d) Nach wie vielen Jahren wäre die Bevölkerung auf 70 Mio Einwohner zurückgegangen?

Aufgabe 6: Tropfinfusion
Einem Patienten werden 5 mg eines Medikamentes pro Minute per Tropfinfusion ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge werden jede Minute 4 % über die Nieren wieder ausgeschieden.

a) Berechne den Gehalt g(t) des Medikamentes im Blut für t = 1, 2, 3 und 4 Minuten.
b) Bestimme den Änderungsfaktor k und die Sättigungsgrenze G.
c) Nach wie vielen Minuten enthält das Blut des Patienten 100 mg des Medikamentes?

Aufgabe 7: Düngung

Auf einem Acker werden jede Woche 10 kg eines Pestizides verteilt, von dem jede Woche 30% wieder abgebaut werden.

a) Berechne die Menge g(t) des Pestizides auf dem Acker nach t = 1, 2, 3 und 4 Wochen.
b) Bestimme den Änderungsfaktor k und die Sättigungsgrenze G.
c) Nach wie vielen Wochen enthält der Acker 30 kg des Pestizides?

Aufgabe 8: Abkühlung

Ein 60°C heißer Kaffee verliert jede Minute 10% seiner Temperaturdifferenz zur 20°C warmen Raumluft.

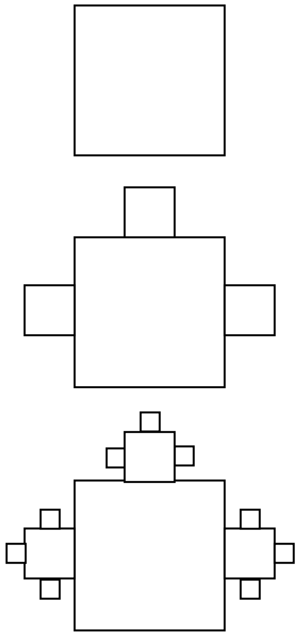
a) Berechne die Temperatur $\vartheta(t)$ nach t = 1, 2, 3 und 4 Minuten
b) Nach wie vielen Minuten ist der Kaffee auf 40°C abgekühlt?
c) Am nächsten Tag ist der ebenfalls mit 60°C abgefüllte Kaffee nach 5 Minuten auf 50°C abgekühlt. Welche Temperatur hat die Raumluft?

Aufgabe 9: Marktsättigung

In einem Land werden pro Jahr 100 000 Rasierer verkauft. Eine koreanische Firma bringt nach einer dreimonatigen massiven Werbeaktion ein neues Modell unter einem “coolen” finnischem Label auf den Markt

a) Was spricht für die Annahme, dass die Zahl u(t) der verkauften Artikel nach t Monaten nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums zunehmen wird?
b) Im ersten Monat werden 20 000 Stück verkauft. Berechne den Änderungsfaktor k und gib die Sättigungsgrenze U an.
c) Ist es aufgrund dieser Erfahrung realistisch anzunehmen, dass sich im ersten Halbjahr 50 000 Artikel verkaufen lassen?

Aufgabe 10: Lineares und beschränktes Wachstum im Vergleich



Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 dm gehen auf die rechts angedeutete Weise neue Figuren hervor. Die im t-ten Schritt angefügten Quadrate sind jeweils nur ein Drittel so breit wie die im $(t-1)$-ten Schritt angefügten Quadrate.

a) Berechne den **Umfang** u(t) nach n = 0, 1, 2, 3 und 4 Schritten.
b) Wie groß ist der Zuwachs $u(t+1) - u(t)$ des Umfangs im $(t+1)$-ten Schritt? Um welche Wachstumsart handelt es sich?
c) Stelle eine Formel auf, mit der sich u(t) direkt aus t berechnen lässt.
d) Berechne den **Flächeninhalt** a(t) der Figur nach t = 1, 2, 3 und 4 Schritten.
e) Begründe, dass $a(t+1) = a(t) + \left(\frac{1}{3}\right)^{t+1}$.
f) Zeige, dass man unter der Annahme eines beschränktes Wachstums mit Änderungsfaktor $k = \frac{1}{3}$ und Wachstumsgrenze $A = \frac{3}{2}$ die Beziehung aus e) gewinnt.
g) Berechne a(100) und u(100) und vergleiche. Welche Aussage lässt sich aus diesem Beispiel über den Umfang und die Fläche natürlicher Gebilde wie z. B. des Landes Baden-Württemberg ableiten?

4.7. Lösungen zu den Aufgaben zum beschränkten Wachstum

Aufgabe 0: Rekursionsformeln mit dem GTR am Beispiel Ratensparen

a) $b(t + 1) = 1{,}02 \cdot b(t) – 50\,000$ mit $b(0) = 1\,000\,000 \Rightarrow b(25) = 39\,091$ € und $b(26) = -1013$ € $\Rightarrow$ Das Geld reicht 25 Jahre

b) $b(t + 1) = 1{,}03 \cdot b(t) + 5000$ € mit $b(0) = 5000$ € $\Rightarrow b(15) = 100\,784$ €

c) $b(t + 1) = 1{,}05 \cdot b(t) – 6000$ € $\Rightarrow b(11) = 276{,}24$ € und $b(12) = -5710$ € $\Rightarrow$ Der Kredit ist nach 12 Jahren getilgt.

Aufgabe 1: Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum beim radioaktiven Zerfall

a) Die Zahl r(t) der Radon-Atome schrumpft exponentiell: $r(t) = r(0) \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$ mit $r(0) = 1000$ und $r(3{,}6) = 500 \Leftrightarrow k = \sqrt[3{,}6]{\frac{50}{100}} = 0{,}825 \Leftrightarrow r(t) = 1000 \cdot 0{,}825^t$ mit $p = 17{,}5 \Leftrightarrow$ M(t) nimmt jeden Tag um 17,5 % ab.

b) $p(t) = 1000 - r(t) \Leftrightarrow p(0) = 0$; $p(1) = 175$; $p(2) = 319$; $p(3) = 438$; $p(4) = 537$; $p(5) = 618$; $p(10) = 854$; $p(20) = 979$; $p(50) = 997$

c) $p(t) = 1000 - 1000 \cdot 0{,}825^t$

d) Für $t \to \infty$ strebt p(t) gegen P = 1000

Aufgabe 2: Beschränktes Wachstum bei einer chemischen Reaktion

a) Aus der Wertetabelle bzw. dem Graphen ergibt sich die Vermutung E = 500

b) $e(1) = E - k \cdot [E - e(0)] \Rightarrow 130 = 500 - k \cdot [500 - 0] \Leftrightarrow k = \frac{370}{500} = 0{,}74$

c) $e(t) = 500 - 500 \cdot 0{,}74^t \Leftrightarrow B(10) \approx 475$ und $B(15) \approx 494$

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum bei Baumschäden

a) Die Zahl der nach t Jahren noch nicht geschädigten Bäume ist $n(t) = 10\,000 \cdot 0{,}8^t$. Die Zahl der nach t Jahren befallenen Bäume ist $g(t) = 10\,000 - n(t) = 10\,000(1 - 0{,}8^t) \Leftrightarrow g(0) = 0$; $g(1) = 2000$; $g(2) = 3600$; $g(3) = 4880$; $g(4) = 5904$; $g(5) = 6723$; $g(10) = 8926$ und $g(20) = 9885$.

b) $n(t) = 0{,}1 \cdot n(0) \Rightarrow 10\,000 \cdot 0{,}8^t = 0{,}1 \cdot 10\,000 \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}8} \approx 10{,}3$ Jahre

Aufgabe 4: BeschränktesWachstum einer Pilzkultur

a) $p(0) = 20\text{ cm}^2$, $p(1) = 25\text{ cm}^2$, $p(2) = 28{,}8\text{ cm}^2$, $p(3) = 31{,}6\text{ cm}^2$, $p(4) = 33{,}7\text{ cm}^2$ und $p(5) = 35{,}3\text{ cm}^2$.

b) $k = 0{,}75$ und $P = \frac{d}{1-k} = \frac{10}{1-0{,}75} = 40 \Rightarrow p(t) = 40 - 20 \cdot 0{,}75^t$

c) $p(t) = 39 \Leftrightarrow 40 - 20 \cdot 0{,}75^t = 39 \Leftrightarrow 1 = 20 \cdot 0{,}75^t \Leftrightarrow \frac{1}{20} = 0{,}05 = 0{,}75^t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}75)} \approx 10{,}41.$

$\Rightarrow$ Nach 10,41 Tagen = 10 Tagen und $0{,}41 \cdot 24 \approx 10$ Stunden ist die Petrischale zu mehr als 39 cm² bedeckt.

Aufgabe 5: Beschränkte Abnahme einer Landesbevölkerung

a) $z(t + 1) = 150\,000 + 0{,}997 \cdot z(t) \Leftrightarrow z(0) = 80$ Mio; $z(1) = 79{,}91$ Mio; $z(2) = 79{,}82$ Mio und $z(3) = 79{,}7$ Mio.

b) $k = 0{,}997 \Rightarrow Z = \frac{d}{1-k} = \frac{150000}{1-0{,}997} = 50$ Mio $\Rightarrow z(t) = 50$ Mio + 30 Mio$\cdot 0{,}997^t$.

c) $z(10) = 79{,}1$ Mio, $z(20) = 78{,}25$ Mio und $z(50) = 75{,}8$ Mio

d) $z(t) = 70$ Mio $\Leftrightarrow 70 = 50 + 30 \cdot 0{,}997^t \Leftrightarrow 20 = 30 \cdot 0{,}997^t \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 0{,}997^t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2/3)}{\ln(0{,}997)} \approx 135$ Jahre.

Aufgabe 6: Tropfinfusion

a) $g(t + 1) = 5$ mg + $0{,}96\, g(t) \Rightarrow g(0) = 5$ mg; $g(1) = 9{,}8$ mg; $g(2) = 14{,}41$ mg; $g(3) = 18{,}83$ mg und $g(4) = 23{,}08$ mg.

b) $k = 0{,}96 \Rightarrow G = \frac{d}{1-k} = \frac{5}{1-0{,}96} = 125$ mg $\Rightarrow g(t) = 125$ mg – 125 mg$\cdot 0{,}96^t$.

c) 100 mg = z(t) $\Leftrightarrow$ 25 mg = 125 mg$\cdot 0{,}96^t \Leftrightarrow \frac{25\text{ mg}}{125\text{ mg}} = 0{,}2 = 0{,}96^t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}96)} \approx 39{,}4$ Minuten.

Aufgabe 7: Düngung

a) $g(t + 1) = 10 + 0{,}7 \cdot g(t) \Rightarrow g(0) = 10$ kg; $g(1) = 17$ kg; $g(2) = 21{,}9$ kg und $g(4) = 25{,}33$ kg.

b) $k = 0{,}3 \Rightarrow G = \frac{d}{1-k} = \frac{10}{1-0{,}7} = 33{,}\bar{3}$ kg $\Rightarrow g(t) = 33{,}\bar{3}$ kg $- 33{,}\bar{3} \cdot 0{,}7^t$.

c) 30 kg $= g(t) \Leftrightarrow 3{,}\bar{3}$ kg $= 33{,}\bar{3} \cdot 0{,}7^t \Leftrightarrow 0{,}1 = 0{,}7^t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}7)} \approx 6{,}45$ Wochen.

Aufgabe 8: Abkühlung

a) $\vartheta(t) = 20°C + 40°C \cdot 0{,}9^t \Rightarrow \vartheta(0) = 60°C$; $\vartheta(1) = 55°C$; $\vartheta(2) = 52{,}4°C$; $\vartheta(3) = 49{,}16°C$ und $\vartheta(4) = 46{,}24$ °C.

b) 40 °C $= \vartheta(t) \Leftrightarrow 20°C = 40°C \cdot 0{,}9^t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)} \approx 6{,}58$ Minuten.

c) $50°C = \vartheta(5) \Leftrightarrow 50°C = G - (G - 60°C) \cdot 0{,}9^5 \Leftrightarrow 50°C = G(1 - 0{,}9^5) + 60°C \cdot 0{,}9^5 \Leftrightarrow 50°C \approx 0{,}41 \cdot G + 35{,}43$ °C $\Leftrightarrow 14{,}57$ °C $= 0{,}41 \cdot G \Leftrightarrow G \approx 35{,}53$ °C (!)

Aufgabe 9: Marktsättigung

a) Die Zahl im t + 1 ten Monat neu verkauften Geräte $u(t + 1) - u(t)$ ist vermutlich proportional zur Zahl der potentiellen Kunden $100\,000 - u(t)$, die im t-ten Monat noch **kein** Gerät gekauft hatten: $u(t + 1) - u(t) = k\,(100\,000 - u(t) \Leftrightarrow$ Beschränktes Wachstum mit Sättigungsgrenze $U = 100\,000$

b) $u(1) - u(0) = k \cdot (100\,000 - u(0))$ mit $u(1) = 20\,000$ und $u(0) = 0 \Leftrightarrow k = 0{,}2$

c) $u(t) = 100\,000(1 - 0{,}8^t) \Leftrightarrow u(6) \approx 73\,785 > 50\,000 \Rightarrow$ Die Annahme wäre realistisch.

Aufgabe 10: Lineares und beschränktes Wachstum im Vergleich

Alle Strecken in dm, alle Flächen in dm^2:

a) $u(0) = 4$, $u(1) = 6$, $u(2) = 8$, $u(3) = 10$ und $u(4) = 12$

b) $u(t + 1) - u(t) = 2 \Rightarrow$ konstanter Zuwachs $\Rightarrow$ **lineares Wachstum!**

c) $u(t) = 2t + 4$

d) $a(0) = 1$; $a(1) = 1 + \frac{1}{3} \approx 1{,}33$; $a(2) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \approx 1{,}44$; $a(3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \approx 1{,}48$ und

$a(4) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 1{,}49$

e) Im t + 1-ten Schritt kommen 3^{t+1} Quadrate mit dem jeweiligen Flächeninhalt $\left(\frac{1}{3^{t+1}}\right)^2$ hinzu,

also $a(t + 1) = a(t) + 3^{t+1} \cdot \left(\frac{1}{3^{t+1}}\right)^2 = a(t) + \left(\frac{1}{3}\right)^{t+1}$.

f) $a(t) = A - [A - a(0)] \cdot k^t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a(t + 1) &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{t+1} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t \cdot \left[1 - \frac{2}{3}\right] \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t \cdot \frac{1}{3} \\
&= a(t) + \left(\frac{1}{3}\right)^{t+1}.
\end{aligned}$$

g) $u(100) = 204$ und $a(100) \approx 1{,}5 \Leftrightarrow$ Der **Umfang** wächst unbeschränkt, aber der **Flächeninhalt** nähert sich einem **Grenzwert**.